CHAPTER – 1

Relation and Function

संबंधों के प्रकार (समुच्चय A में)

- स्वतुल्य संबंध
  $(a,a) \in R, \ \forall \ a \in A$

- सममित संबंध
  $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

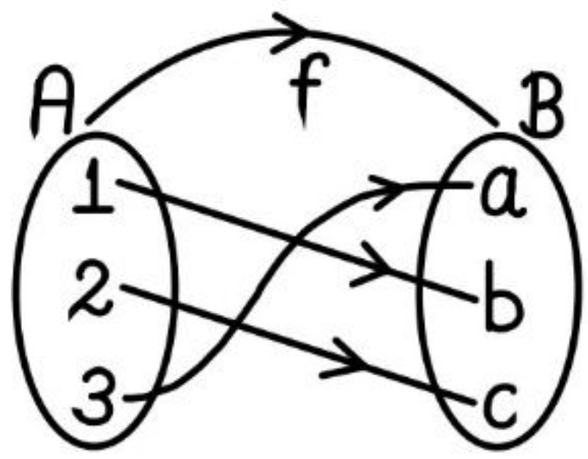
- संक्रामक संबंध
  $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

- तुल्यता संबंध
  स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक तीनों

फलनों के प्रकार

एकैकी फलन –
सहप्रांत के किसी भी अवयव का प्रांत में एक से अधिक पूर्व प्रतिबिम्ब विद्यमान नहीं हो।

यदि $f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$

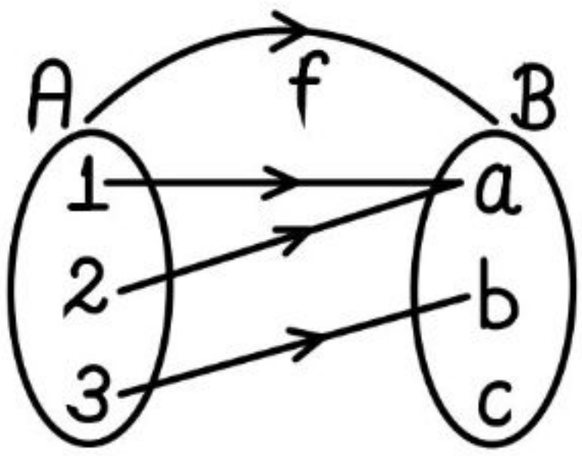


बहुएकी फलन –

सहप्रांत के कम से कम एक अवयव का प्रांत में एक से अधिक पूर्व प्रतिबिम्ब विद्यमान हो।

यदि $f(x_1) = f(x_2)$

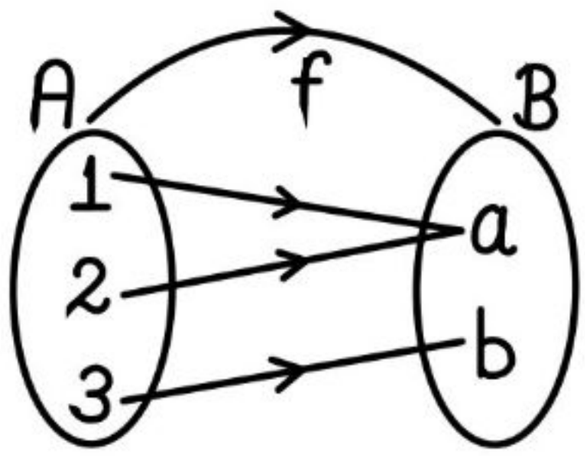
$\Rightarrow x_1 \neq x_2$



आच्छादक फलन –

सहप्रांत के प्रत्येक अवयव का प्रांत में पूर्व प्रतिबिम्ब विद्यमान हो।

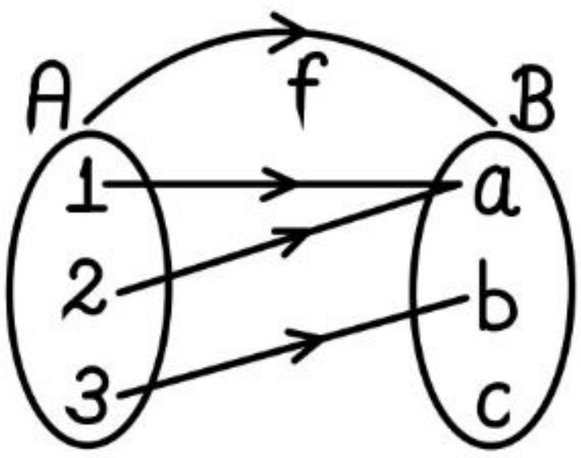
- परिसर = सहप्रांत



- सहप्रांत = $\{a, b\}$
- परिसर = $\{a, b\}$

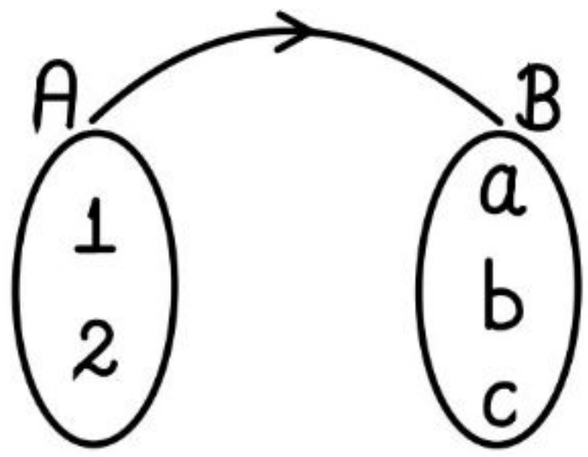
अन्तर्क्षेपी फलन –

सहप्रांत के कम से कम एक अवयव का प्रांत में कोई पूर्व प्रतिबिम्ब विद्यमान न हो।



- परिसर $\subset$ सहप्रांत तथा परिसर $\neq$ सहप्रांत
- सहप्रांत = $\{a, b, c\}$
- परिसर = $\{a, b\}$

Other Imp. Formulas



$n(A) = 2 = a$

$n(B) = 3 = b$

- A से B में कुल संबंधों की संख्या –

$$2^{ab} = 2^{2\times3} = 2^6 = 64$$

- A से B में कुल फलनों की संख्या

$$b^a = 3^2 = 9$$

- A से B में कुल एकैकी फलनों की संख्या –

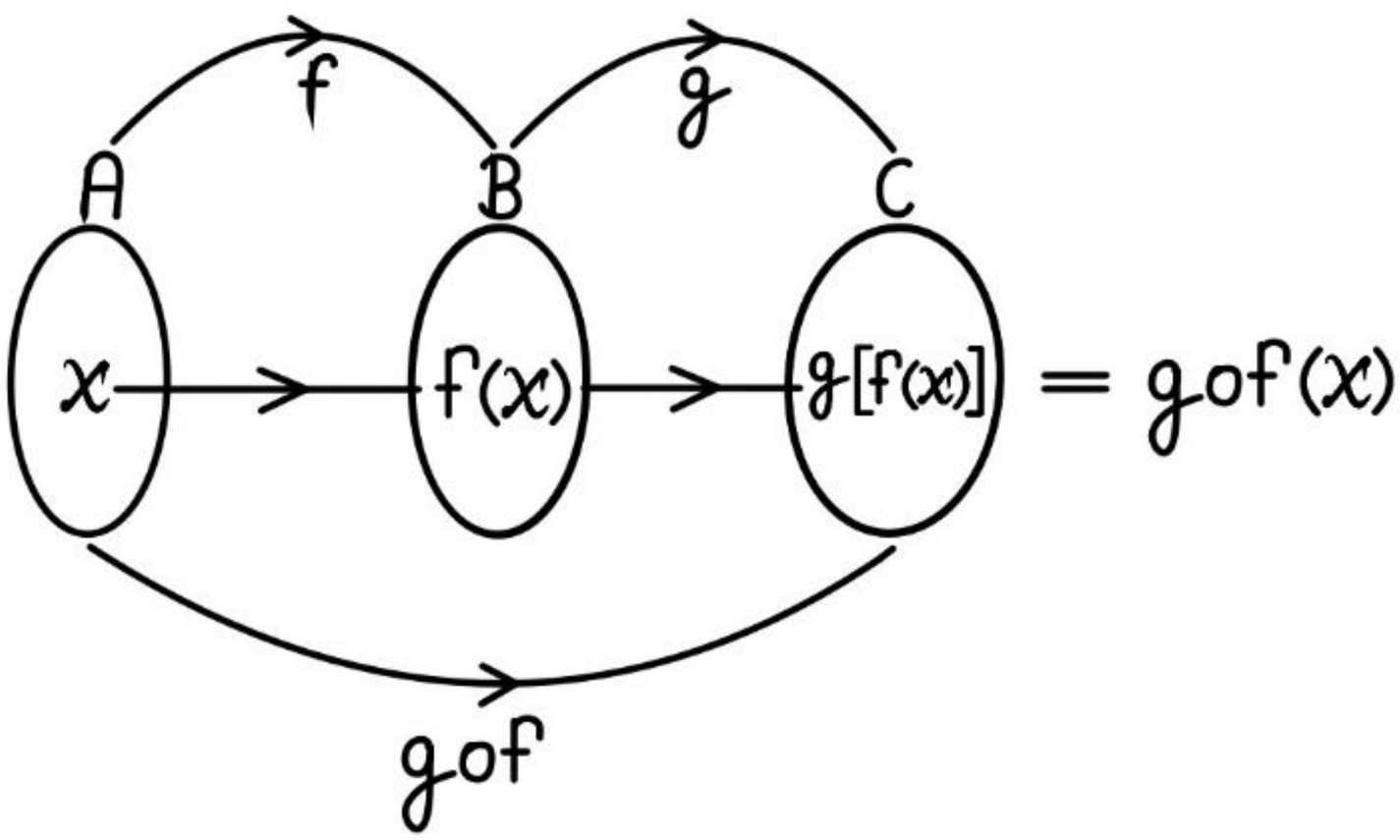
$$^bP_a = {}^3P_2 = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

- यदि $n(A) = a$ तो A से A में कुल एकैकी आच्छादी फलनों की संख्या $= \lfloor a$

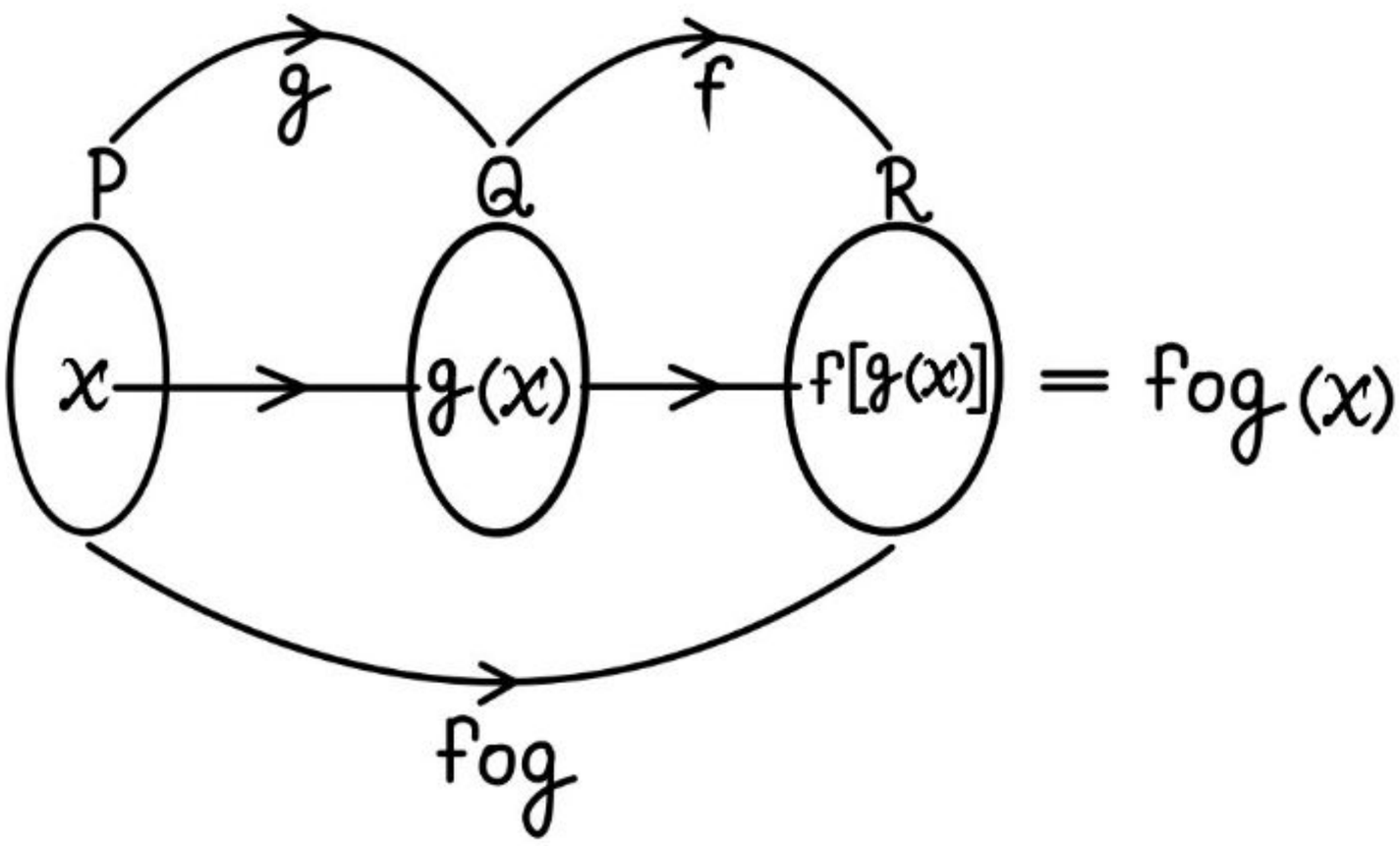
फलनों का संयोजन

दो फलनों f तथा g के संयोजन से निम्न फलन प्राप्त किए जा सकते हैं।

(i) fog (ii) gof (iii) fof (iv) gog



यदि $f : A \rightarrow B$
तथा $g : B \rightarrow C$
तो $gof : A \rightarrow C$



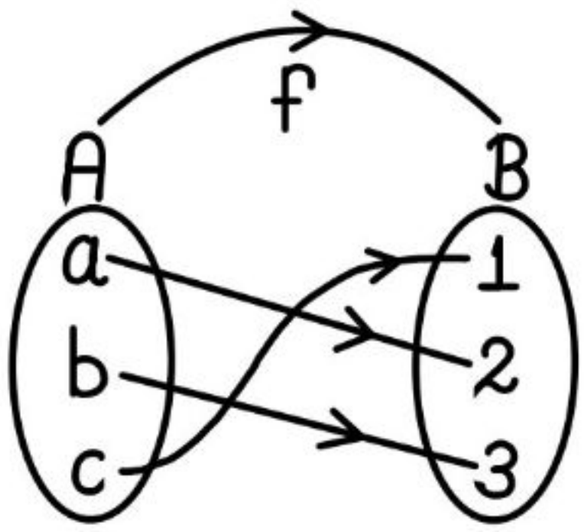
यदि $g : P \rightarrow Q$
तथा $f : Q \rightarrow R$
तो $fog : P \rightarrow R$

व्युत्क्रमणीय फलन

- ऐसा फलन जिनका प्रतिलोम फलन विद्यमान हो।
- वे फलन जो एकैकी तथा आच्छादक दोनों हैं, केवल उनका प्रतिलोम फलन विद्यमान होगा।
- यदि $fog(x) = gof(x) = x$
  तो f तथा g एक दूसरे के प्रतिलोम फलन होते हैं।
  अर्थात $f(x) = g^{-1}(x)$ तथा $g(x) = f^{-1}(x)$
- $fof^{-1}(x) = f^{-1}of(x) = x$

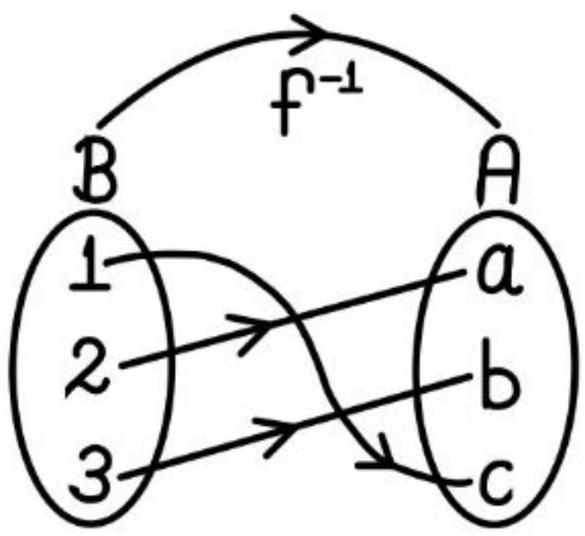
$\Rightarrow f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$

- किसी भी फलन का प्रतिलोम फलन, यदि उसका अस्तित्व है, अद्वितीय होता है।



$f : A \longrightarrow B$

$f = \{(a,2), (b,3), (c,1)\}$



$f^{-1} : B \longrightarrow A$

$f^{-1} = \{(1,c), (2,a), (3,b)\}$

CHAPTER – 2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

1.

	प्रांत	परिसर
$\sin^{-1}$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	R	$(0, \pi)$
$\sec^{-1}$	$R - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\operatorname{cosec}^{-1}$	$R - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

2.
- $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}x$
- $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}x$
- $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}x$
- $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}x$
- $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}x$
- $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}x$

3. $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$

$\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$

4. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

5. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \; ; \; xy < 1$

6. $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \; , \; xy > -1$

7. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

8. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

$\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$

9. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

$\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

10. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

CHAPTER -3

आव्यूह

- संख्याओं या फलनों का एक आयताकार क्रम विन्यास
- इन संख्याओं या फलनों को के अवयव अथवा प्रविष्टियाँ कहते हैं।
- आव्यूह को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित करते हैं।

$$A = [a_{ij}]_{2\times2} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \\ \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

आव्यूह की कोटि $= m \times n$

$m \rightarrow$ पंक्तियों की संख्या

$n \rightarrow$ स्तम्भों की संख्या

समान आव्यूह –

→ कोटि बराबर

→ संगत अवयव बराबर

आव्यूहों के प्रकार

पंक्ति आव्यूह (Row Matrix)

- केवल 1 पंक्ति वाला आव्यूह
- कोटि 1×n प्रकार की होती है

$$[1 \quad 2 \quad -5]_{1\times3}, \quad [3 \quad \sqrt{2}]_{1\times2}, \quad [-1]_{1\times1}$$

स्तम्भ आव्यूह (Column Matrix)

- केवल 1 स्तम्भ वाला आव्यूह
- कोटि m×1 प्रकार की होती है

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}_{2\times1}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}, \quad [-1]_{1\times1}$$

वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

- पंक्तियों की संख्या = स्तम्भों की संख्या
- कोटि m×m प्रकार की होती है।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

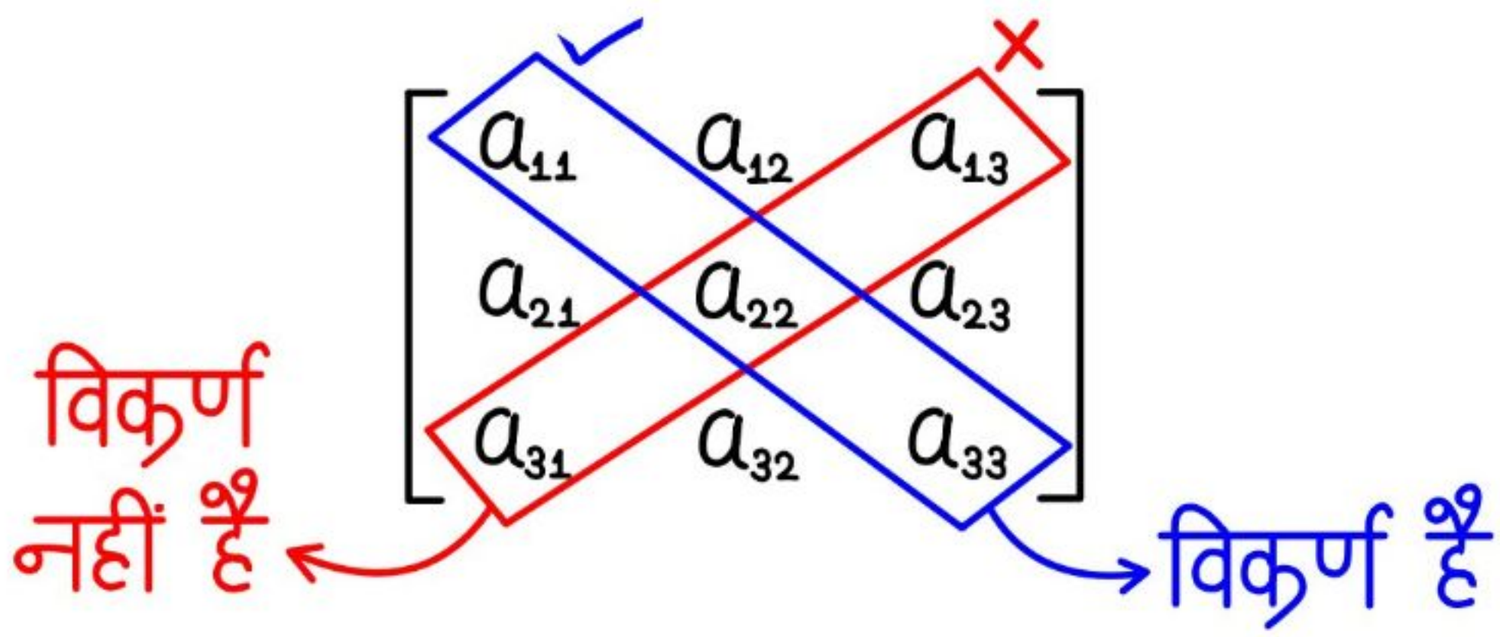
(2 कोटि का आव्यूह) (3 कोटि का आव्यूह)

विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)

- ऐसा वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के अलावा बाकी सभी अवयव शून्य हों।

  अर्थात् $a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$

- विकर्ण अवयव $\longrightarrow a_{ij} \ , \ i = j$



$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \ , \ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

अदिश आव्यूह (Scalar Matrix)

- ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव समान हों।

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} \ , \ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) → I या I_n [n → कोटि]

- ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव 1 हों।

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; ; \; i = j \\ 0 \; ; \; i \neq j \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह (Zero Matrix)

- O से दर्शाया जाता है।
- सभी अवयव शून्य

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times2} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

आव्यूहों पर संक्रियाएँ

(1) दो आव्यूहों का योग

(2) दो आव्यूहों का अन्तर

- योग/अन्तर के लिए दोनों आव्यूहों की कोटि समान होनी चाहिए।

- जोड़ने या घटाने पर प्राप्त आव्यूह की कोटि दोनों आव्यूहों की कोटि के समान होती है।

(3) आव्यूह का किसी अदिश से गुणा

- आव्यूह का प्रत्येक अवयव उस अदिश से गुणा होगा।
- प्राप्त आव्यूह की कोटि पहले वाले आव्यूह की कोटि के समान रहती है।

(4) दो आव्यूहों का गुणन

- यदि पहले आव्यूह के स्तम्भों की संख्या, दूसरे आव्यूह के पंक्तियों की संख्या के बराबर हो, केवल तब ही दोनों आव्यूहों का गुणन संभव है।

$$[A]_{m\times n} \times [B]_{p\times q} = [C]$$

$$[m\times n]\ [p\times q] \longrightarrow m\times q$$

$$n = p$$

आव्यूह का परिवर्त $\longrightarrow$ A^T या A'
(Transpose of a Matrix)

- पंक्ति $\longleftrightarrow$ स्तम्भ

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ तो A^T या $A' = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

परिवर्त के गुणधर्म →

- $(A')' = A$
- $(A+B)' = A' + B'$
- $(A-B)' = A' - B'$
- $(AB)' = B'.A'$
- $(kA)' = k(A')$, जहाँ k कोई अचर है।

सममित तथा विषम सममित आव्यूह → केवल वर्ग आव्यूह

- सममित आव्यूह $\boxed{A' = A}$ $a_{ij} = a_{ji}$
- विषम सममित आव्यूह $\boxed{A' = -A}$ $a_{ij} = -a_{ji}$
- केवल शून्य आव्यूह , सममित आव्यूह तथा विषम सममित आव्यूह दोनों होता है।
- किसी भी वर्ग आव्यूह A के लिए $(A + A')$ सदैव एक सममित आव्यूह होता है।
- किसी भी वर्ग आव्यूह A के लिए $(A - A')$ सदैव एक विषम सममित आव्यूह होता है।
- किसी भी वर्ग आव्यूह A को सममित आव्यूह तथा विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है।

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')}$$

व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrix)

- ऐसा आव्यूह जिसके प्रतिलोम आव्यूह का अस्तित्व है।
- यदि $AB = BA = I$
  तो A व B एक दूसरे के प्रतिलोम आव्यूह हैं।
  अर्थात् $A^{-1} = B$ तथा $B^{-1} = A$
- केवल वर्ग आव्यूह का ही प्रतिलोम विद्यमान हो सकता है।
  (सभी आयताकार आव्यूहों का नहीं)
  क्योंकि केवल वर्ग आव्यूहों में ही $AB = BA$ हो सकता है।
- वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है, अद्वितीय होता है।
  $\longrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$

CHAPTER – 4

सारणिक

- वर्ग आव्यूह से संबंधित एक संख्या
- $|A|$ या $\det A$ या Δ द्वारा निरूपित

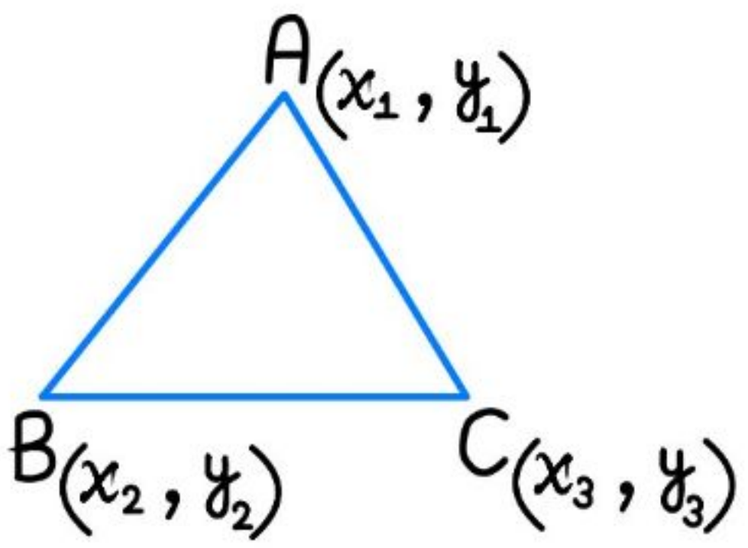
Note – $\boxed{|KA| = K^n|A|}$

$n \rightarrow$ वर्ग आव्यूह A की कोटि

$K \rightarrow$ अदिश राशि (अचर)

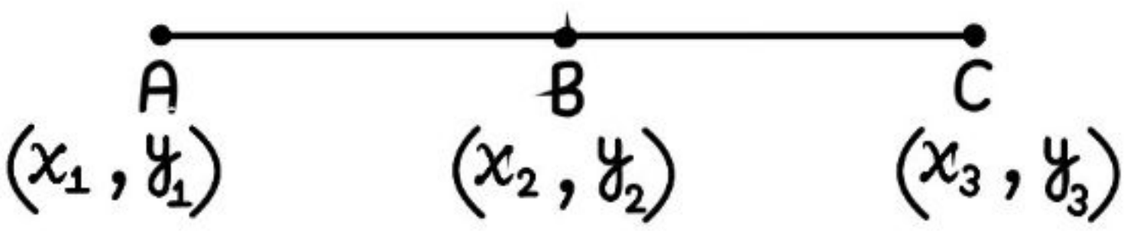
$A \rightarrow$ वर्ग आव्यूह

त्रिभुज का क्षेत्रफल –



$$\Delta ABC \text{ का क्षे.} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

संरेखता की शर्त –



$$\boxed{\Delta ABC \text{ का क्षे.} = 0}$$

उपसारणिक और सहखंड

(Minors And Cofactors)

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ के लिए

a_{11} का उपसारणिक $= M_{11}$	a_{11} का सहखंड $= A_{11}$
a_{12} का उपसारणिक $= M_{12}$	a_{12} का सहखंड $= A_{12}$
a_{21} का उपसारणिक $= M_{21}$	a_{21} का सहखंड $= A_{21}$
a_{22} का उपसारणिक $= M_{22}$	a_{22} का सहखंड $= A_{22}$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

$M_{ij} \rightarrow$ उपसारणिक

$A_{ij} \rightarrow$ सहखंड

Note :

- किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को उनके संगत सहखंडों से गुणा करके जोड़ने पर सारणिक का मान प्राप्त होता है।
- किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को किसी अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों से गुणा करके जोड़ने पर सदैव शून्य प्राप्त होता है।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \\ &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} \\ &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} \\ &= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} \\ &= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} \\ &= a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33} \end{aligned}$$

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0$$

$$a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} = 0$$

$$a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31} = 0$$

इसी प्रकार अन्य भी होंगे।

आव्यूह का सहखंडज (Adjoint of a Matrix)

- एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ का सहखंडज, आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप में परिभाषित है जहाँ A_{ij}, अवयव a_{ij} का सहखंड है।
- आव्यूह A के सहखंडज को adj A के द्वारा व्यक्त करते हैं।

$$\boxed{adj(A) = [A_{ij}]^T}$$

- यदि A कोई n कोटि का आव्यूह है तो $\boxed{A(adj\,A) = (adj\,A)A = |A|I}$ जहाँ I, n कोटि का तत्समक आव्यूह है।
- आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके क्रमशः सारणिकों के गुणनफल के समान होता है। अर्थात् $\boxed{|AB| = |A||B|,}$ जहाँ A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं।
- यदि A एक n कोटि का वर्ग आव्यूह हो तो $\boxed{|adj\,A| = |A|^{n-1}}$ होगा।

आव्यूह का प्रतिलोम (Inverse of a Matrix)

- $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\,A)}$
- एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि $\boxed{|A| = 0}$ है।
- यदि A तथा B दोनों एक ही कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो AB तथा BA भी उसी कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह होतें हैं।
- यदि $AB = BA = I$ तो A व B एक दूसरे के प्रतिलोम आव्यूह होते हैं। अर्थात्, $A^{-1} = B$ तथा $B^{-1} = A$
- $\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

आव्यूह के व्युत्क्रम द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय का हल

$$2x + 3y = 5$$
$$x - y = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x + y - 3Z = 7$$
$$2x + y + 7Z = 5$$
$$x + y + Z = -9$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ Z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = A^{-1}.B}$$

उपसारणिक ⟶ सहखंड ⟶ सहखण्डज आव्यूह
↓
रैखिक समी. निकाय का हल ⟵ प्रतिलोम आव्यूह

संगत / असंगत निकाय →

1. यदि $|A| \neq 0$ हो तो समीकरण निकाय संगत होगा।

2. यदि $|A| = 0$ हो तो →

ⓐ यदि $(adj\, A)\, B \neq 0$ (शून्य आव्यूह), तो कोई हल प्राप्त नहीं होगा। अतः समीकरण निकाय असंगत होगा।

ⓑ यदि $(adj\, A)\, B = 0$ (शून्य आव्यूह), तो हल अनिर्धार्य होगा। (समीकरण निकाय संगत/असंगत दोनों में से कुछ भी हो सकता है।)

CHAPTER – 5

सांतत्य तथा अवकलनीयता

(1) किसी वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की ढाल को उस बिन्दु पर फलन का **अवकलज** कहते हैं।

- किसी फलन का अवकलज ज्ञात करने की प्रक्रिया को **अवकलन** कहते हैं।
- $\frac{dy}{dx}$ = x के सापेक्ष , y का अवकलज
- प्रथम कोटि का अवकलज $= \frac{dy}{dx}$ या $f'(x)$

  द्वितीय कोटि का अवकलज $= \frac{d^2y}{dx^2}$ या $f''(x)$

  तृतीय कोटि का अवकलज $= \frac{d^3y}{dx^3}$ या $f'''(x)$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(2) सांतत्यता →

फलन $f(x)$ की बिन्दु $x = c$ पर सांतत्यता की शर्त –

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$$\Rightarrow \text{LHL} = \text{RHL} = f(c)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{LHL} &= \lim_{x \to c^-} f(x) \\ \text{RHL} &= \lim_{x \to c^+} f(x) \end{aligned}}$$

[LHL → बाँयी सीमा
RHL → दाँयी सीमा]

(i) यदि $f(x)$ व $g(x)$ दो संतत फलन हैं तो उनके संयोजन से बने सभी फलन संतत होते हैं। अर्थात् $fog(x)$, $gof(x)$, $fof(x)$ व $gog(x)$ भी संतत होते हैं।

(ii) यदि $f(x)$ व $g(x)$ दो संतत फलन हैं तो $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\,g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x) \neq 0]$ भी संतत होते हैं।

(3) अवकलनीयता →

फलन $f(x)$ की बिन्दु $x = c$ पर अवकलनीयता की शर्त –

$$\boxed{\text{LHD} = \text{RHD}}$$

[LHD → बाँया अवकलज
RHD → दाँया अवकलज]

$x = c$ पर,

$$\text{LHD} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}$$

$$\mathcal{R}HD = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Note

यदि फलन किसी बिन्दु c पर अवकलनीय है, तो वह उस बिन्दु पर संतत भी है। लेकिन यदि फलन किसी बिन्दु c पर संतत है, तो यह आवश्यक नहीं है कि वह उस बिन्दु पर अवकलनीय भी हो।

(4) अवकलन के सूत्र

- $\frac{d}{dx}(\text{अचर}) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}(x) = 1$
- $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$
- $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

- $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

5. - $\frac{d}{dx}(u.v) = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$
   - $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$

6. प्राचलिक रूप $x = f(t)$, $y = g(t)$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \quad \text{परंतु} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$$

7. log के गुणधर्म

- $\log(m^n) = n\log m$
- $\log(m.n) = \log m + \log n$
- $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n$
- यदि $\log_b a = c$ तो $a = b^c$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log e = 1$
- $e^{\log x} = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a a = 1$
- $\log 1 = 0$

महत्वपूर्ण बिन्दु :-

1. प्रत्येक बहुपद फलन संतत होता है।
2. प्रत्येक परिमेय फलन $\left[f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0\right]$ संतत होता है।
3. महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$ प्रत्येक पूर्णांकीय मान पर असंतत तथा प्रत्येक अपूर्णांकीय मान पर संतत होता है।
4. $|x-a|$, $x=a$ पर संतत है परंतु $x=a$ पर अवकलनीय नहीं है।

CHAPTER – 6

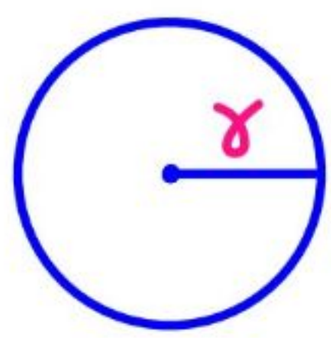
(Application of Derivatives)

राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of change of Quantities) —

$\frac{dy}{dx} \rightarrow$ y में परिवर्तन की दर, x के सापेक्ष

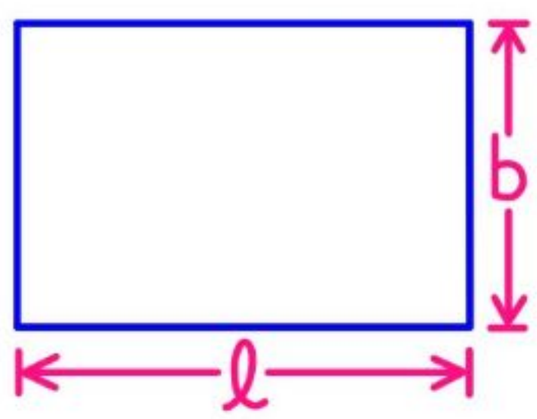
वृत्त (Circle)

- वृत्त की परिधि $= 2\pi r$
- वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$



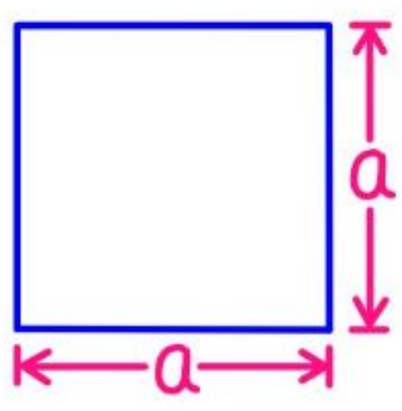
आयत (Rectangle)

- परिमाप $= 2(l + b)$
- क्षेत्रफल $= lb$



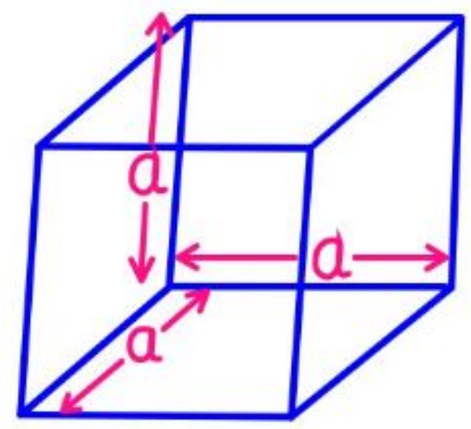
वर्ग (Square)

- परिमाप $= 4a$
- क्षेत्रफल $= a^2$



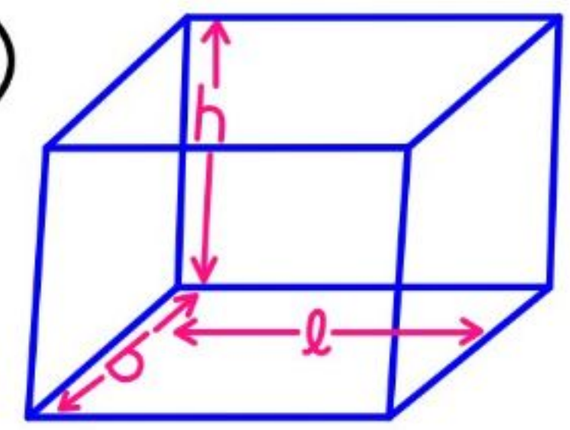
घन (Cube)

- घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6a^2$
- घन का आयतन $= a^3$



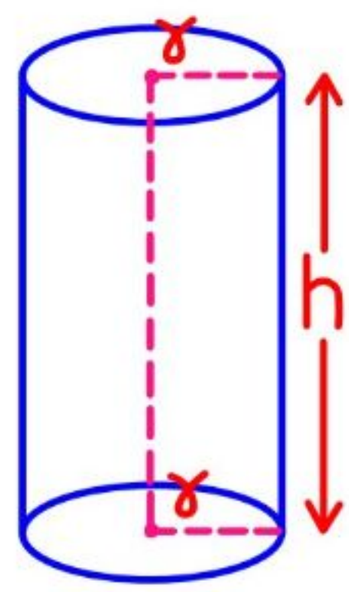
घनाभ (Cuboid)

- घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(\ell b + bh + \ell h)$
- घनाभ का आयतन $= \ell bh$



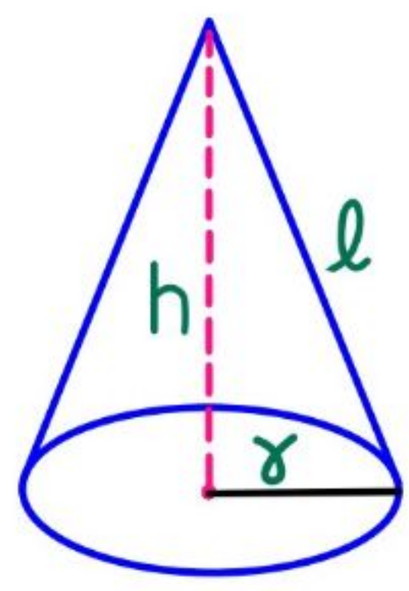
बेलन (Cylinder)

- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r h$
- सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$
- आयतन $= \pi r^2 h$



शंकु (Cone) –

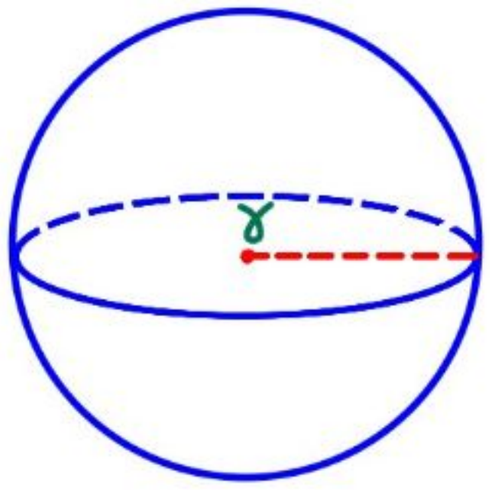
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r \ell$
- सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r + \ell)$
- आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- $\ell^2 = r^2 + h^2$



$\ell =$ तिर्यक ऊँचाई

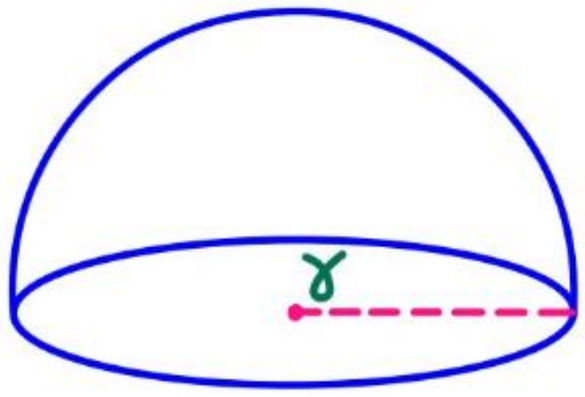
गोला (Sphare)

- पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$
- आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$



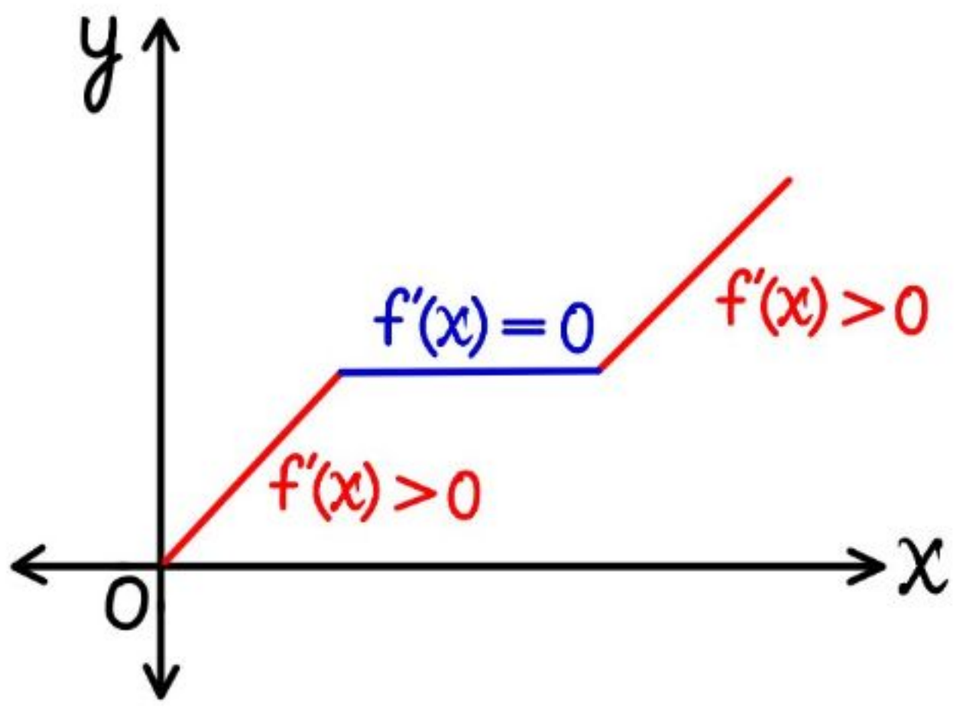
अर्द्धगोला (Hemisphare)

- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$
- सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$
- आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$



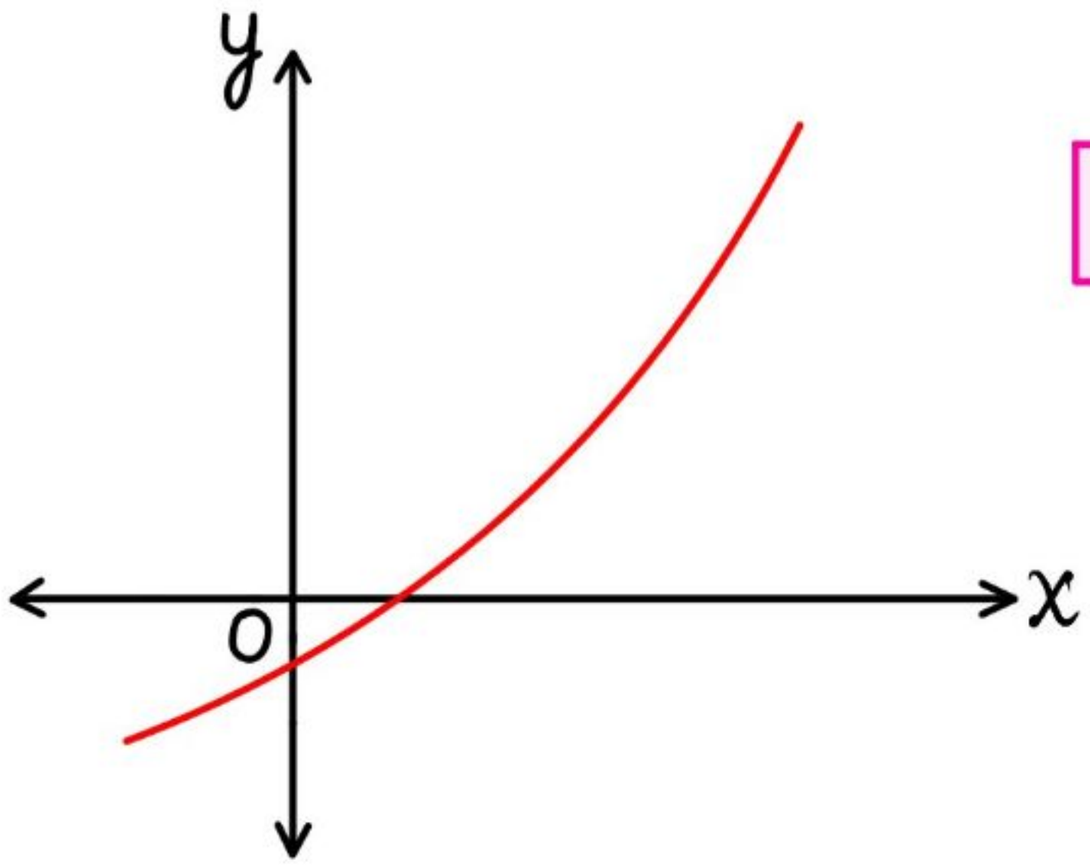
वर्धमान एवं ह्रासमान फलन (Increasing and Decreasing Functions) —

वर्धमान फलन (Increasing function)



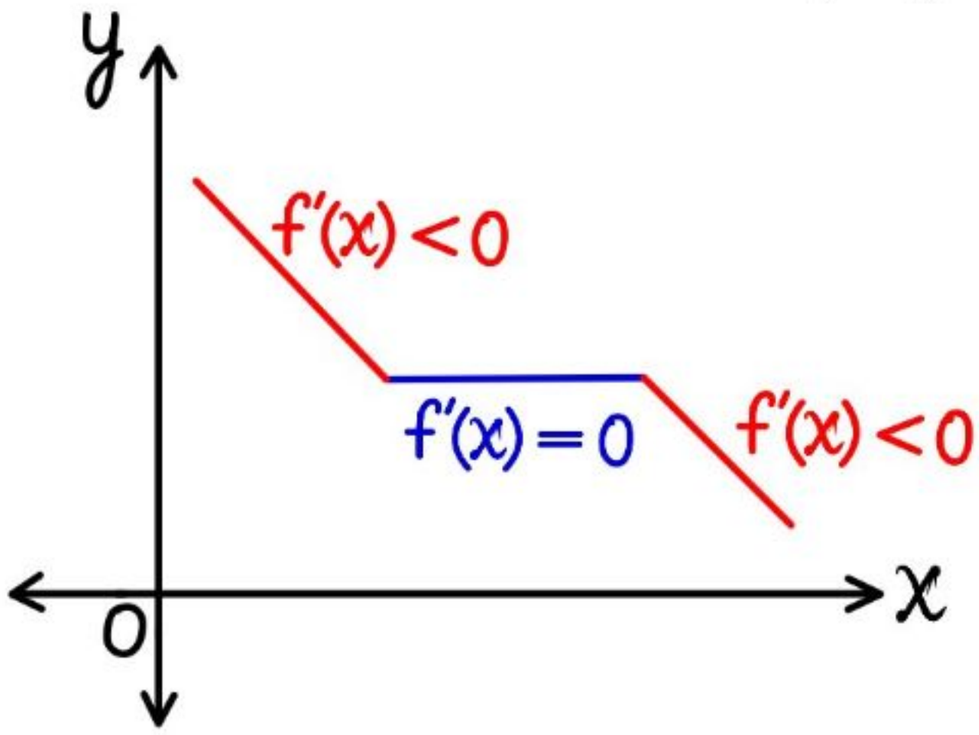
$$\boxed{f'(x) \geq 0}$$

निरन्तर वर्धमान फलन (Strictly Increasing function)



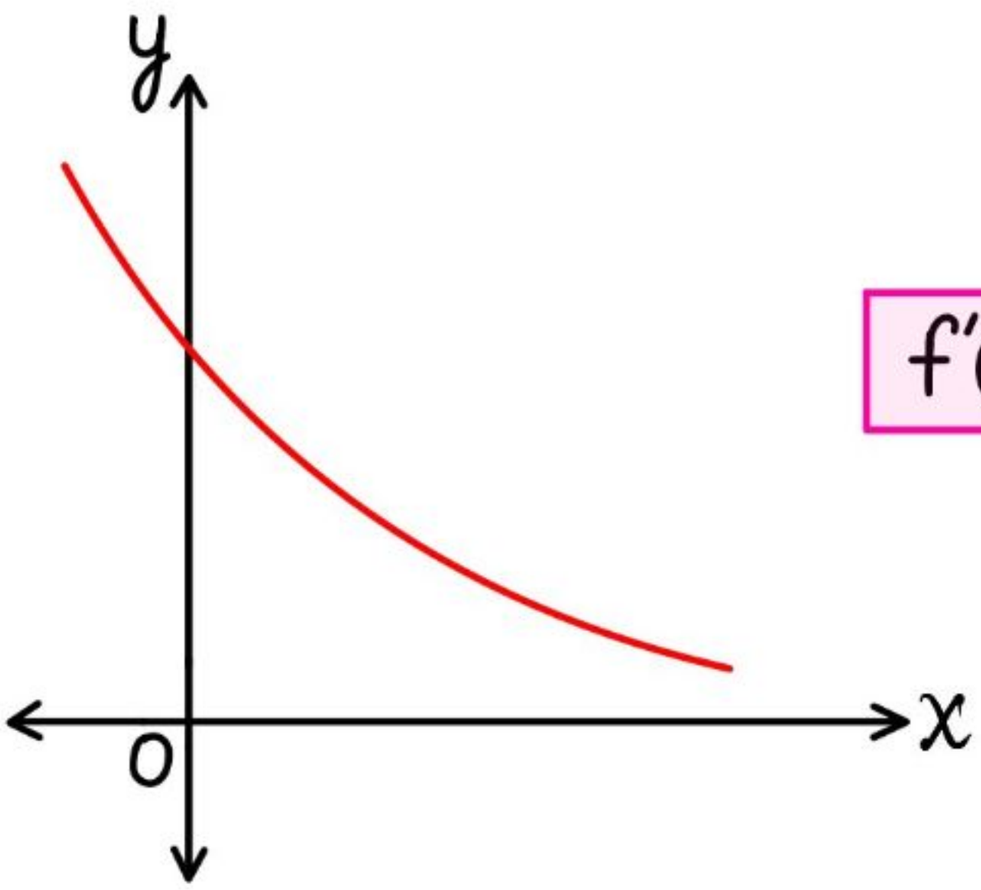
$f'(x) > 0$

ह्रासमान फलन (Decreasing function)



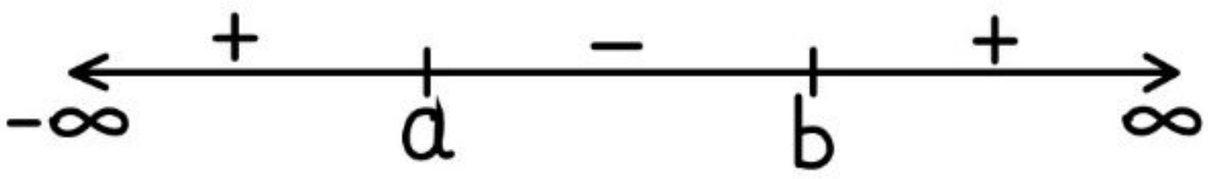
$f'(x) \leq 0$

निरन्तर ह्रासमान फलन (Strictly Decreasing function)



$f'(x) < 0$

संख्या रेखा पर (At number line)



- $x \in (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ में वर्धमान है।
- $x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ में निरन्तर वर्धमान है।
- $x \in [a, b]$ में ह्रासमान है।
- $x \in (a, b)$ में निरन्तर ह्रासमान है।

स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब (Tangent and Normal)

- बिन्दु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता / ढाल $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} = m_1$ (माना)

- बिन्दु (x_0, y_0) पर अभिलम्ब की प्रवणता / ढाल $= -\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}} = m_2$ (माना)

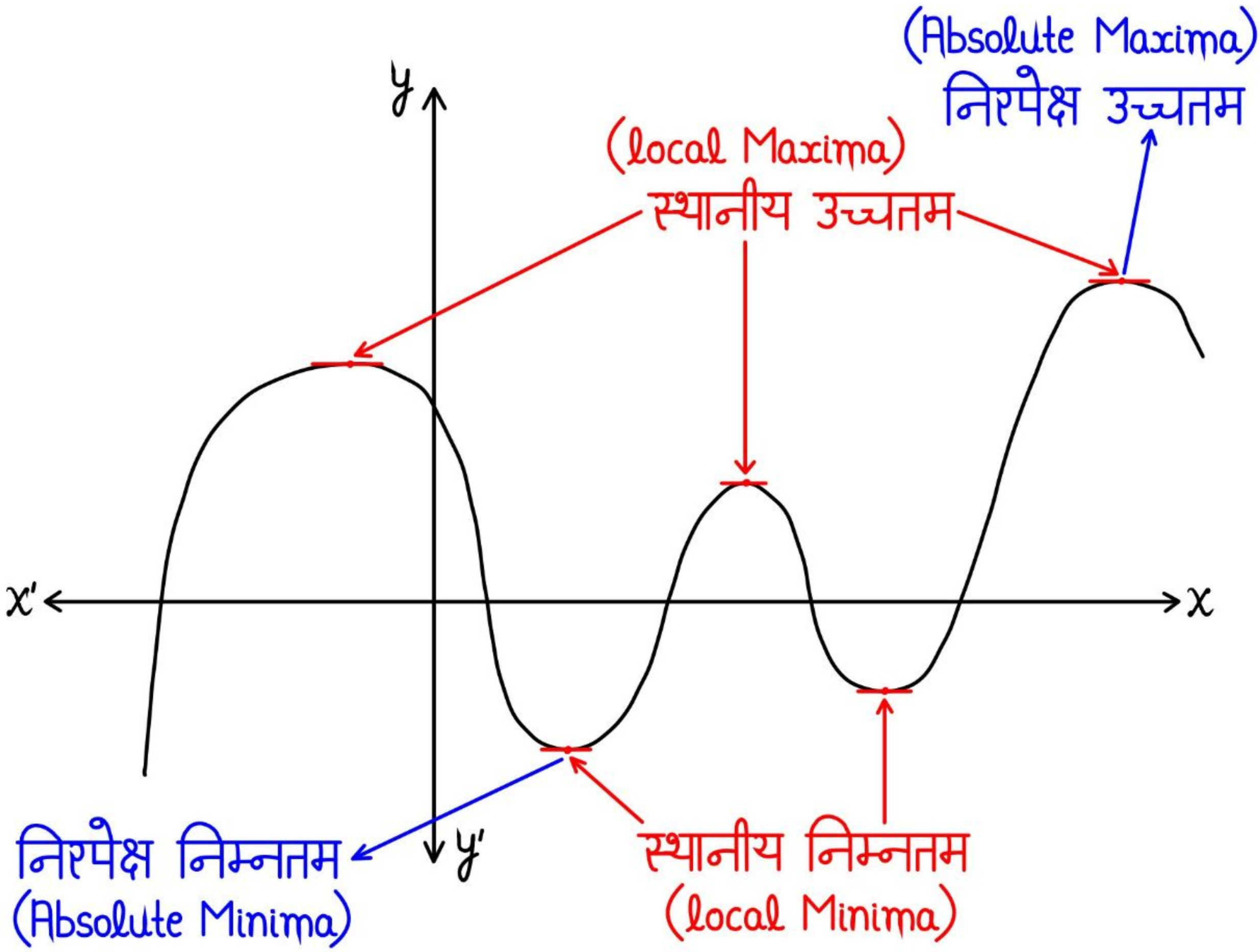
- बिन्दु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण –

$$\boxed{y - y_0 = m_1 (x - x_0)}$$

- बिन्दु (x_0, y_0) पर अभिलम्ब का समीकरण –

$$\boxed{y - y_0 = m_2 (x - x_0)}$$

उच्चतम और निम्नतम (Maxima and Minima)



(i) प्रथम अवकलज विधि (First derivative method)

Steps

(1) $f'(x)$ निकालिए।

(2) $f'(x) = 0$ करके क्रांतिक बिन्दु निकालिए।

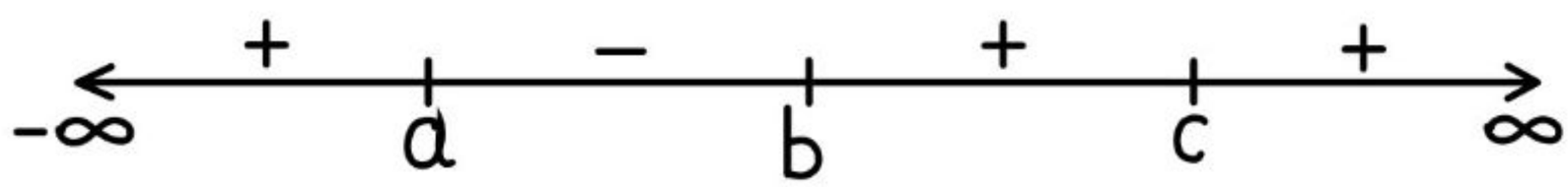
(3) इन क्रांतिक बिन्दुओं को संख्या रेखा पर लिखकर सभी अन्तरालों में $f'(x)$ का चिन्ह लिखिए।

(i) $f'(x)$ का चिन्ह + से − बदले ⇒ स्थानीय उच्चतम

(ii) $f'(x)$ का चिन्ह – से + बदले ⇒ स्थानीय निम्नतम

(iii) $f'(x)$ का चिन्ह न बदले ⇒ नति परिवर्तन का बिन्दु (दोनों तरफ + रहें या दोनों तरफ – रहें)

उदा. माना, क्रांतिक बिन्दु a, b, c हैं



★ $x = a$ पर $f'(x)$ का चिन्ह + से – बदल रहा है अतः $x = a$ स्थानीय उच्चतम का बिन्दु है।

★ $x = b$ पर $f'(x)$ का चिन्ह – से + बदल रहा है अतः $x = b$ स्थानीय निम्नतम का बिन्दु है।

★ $x = c$ पर $f'(x)$ का चिन्ह नहीं बदल रहा है (दोनों तरफ + है) अतः $x = c$ नति परिवर्तन का बिन्दु है।

(ii) द्वितीय अवकलज विधि (Second derivative method)

(1) $f'(x)$ निकालिए।

(2) $f'(x) = 0$ करके क्रांतिक बिन्दु निकालिए। माना, क्रांतिक बिन्दु a, b व c आए हैं।

(3) $f''(x)$ निकालिए।

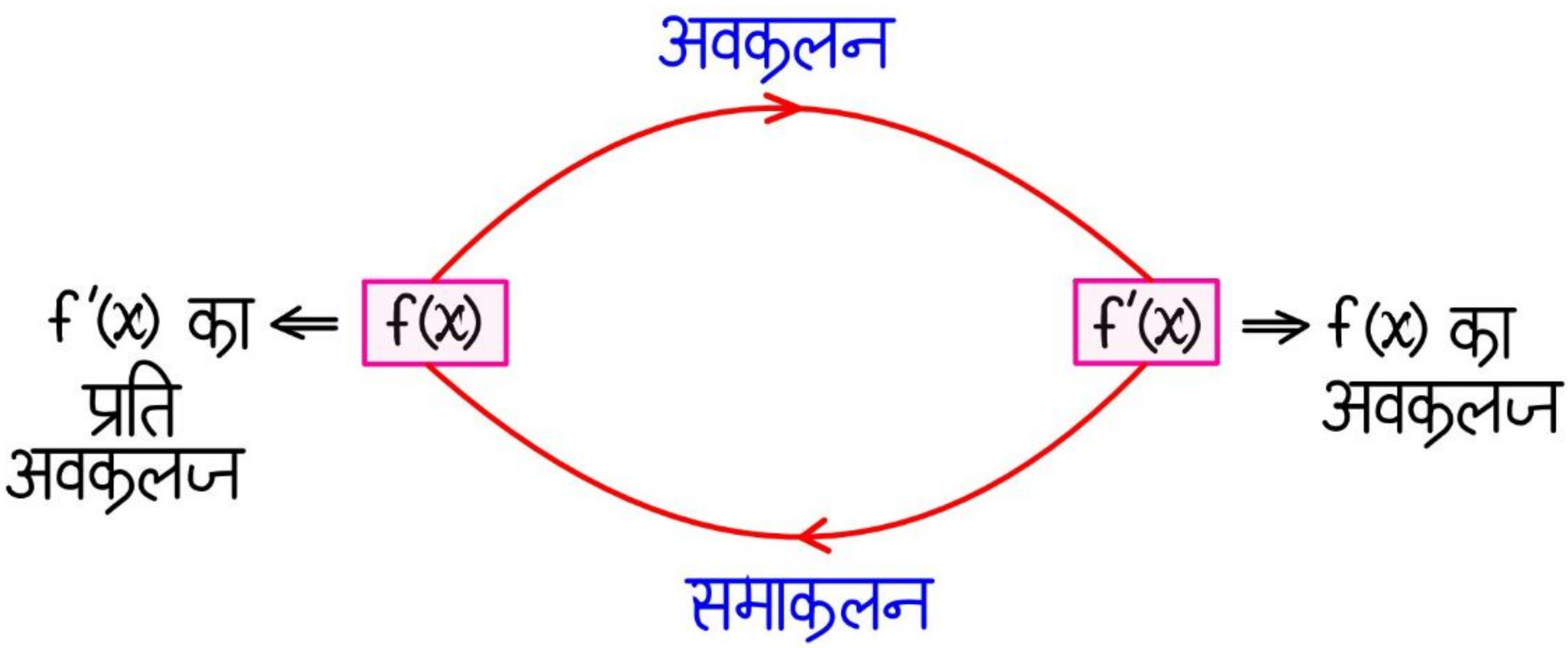
(i) यदि $f''(a) < 0$, तब a स्थानीय उच्चतम का बिन्दु है।

(ii) यदि $f''(b) > 0$, तब b स्थानीय निम्नतम का बिन्दु है।

(iii) यदि $f''(c) = 0$, तब c एक नति परिवर्तन का बिन्दु है।

CHAPTER – 7

समाकलन



$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)\ ,\ \text{तब}\ \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

समाकलन अचर

समाकलन के सूत्र

- $\int dx = x + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
- $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
- $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
- $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + c = -\log|\cos x| + c$
- $\int \cot x \, dx = \log|\sin x| + c$
- $\int \sec x \, dx = \log|\sec x + \tan x| + c$
- $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c = -\cos^{-1} x + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c = -\operatorname{cosec}^{-1} x + c$

- $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

- $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

- $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$$

- $$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

- $$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$$

- $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

- $$\int e^x \left[f(x) + f'(x)\right] dx = e^x . f(x) + c$$

खण्डशः समाकलन (Integration by parts)

Sequence $\Rightarrow$ ILATE

I = Inverse trigonometric function

L = Logarithmic function

A = Algebric function

T = Trigonometric function

E = Exponential function

$$\int \mathrm{I}.\mathrm{II}\,dx = \mathrm{I}\int \mathrm{II}\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\mathrm{I})\cdot\int \mathrm{II}\,dx\right]dx$$

आंशिक भिन्न (Partial fraction)

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)}$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)}$$

- सभी 5 cases में f(x) (अंश) का घात हर का घात से कम हैं।
- यदि अंश की घात हर की घात के बराबर या बड़ी हो तो दोनों बहुपदों को भाग दिया जाता हैं।

निश्चित समाकलन के गुणधर्म
(Some properties of Definite Integral)

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; विशिष्टतया $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; $c \in (a,b)$

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

- $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

- $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

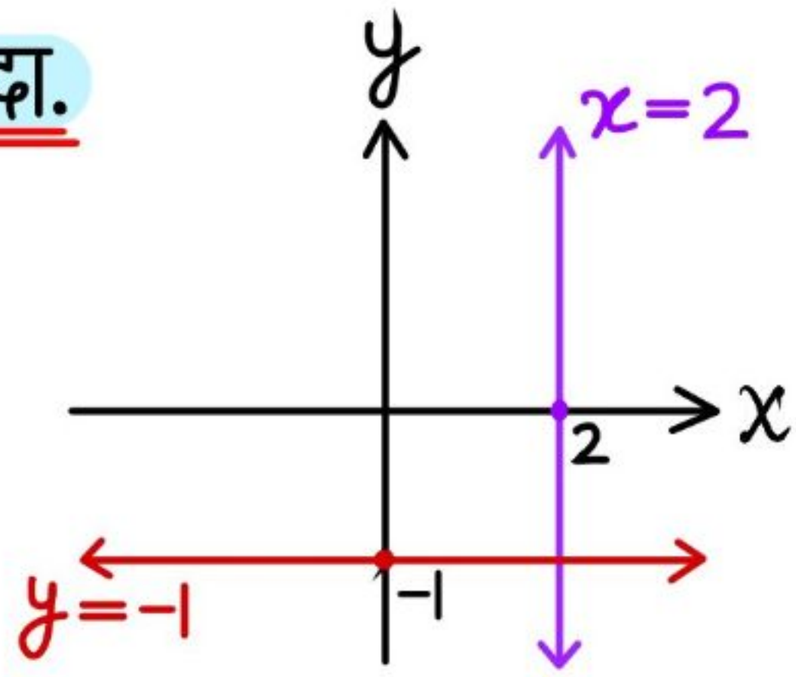
- $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx \text{ ; यदि } f \text{ सम फलन हो } [f(-x) = f(x)] \\ 0 \text{ ; यदि } f \text{ विषम फलन हो } [f(-x) = -f(x)] \end{cases}$

प्रश्नावली 8

समाकलन के अनुप्रयोग

1. सरल रेखा

उदा.



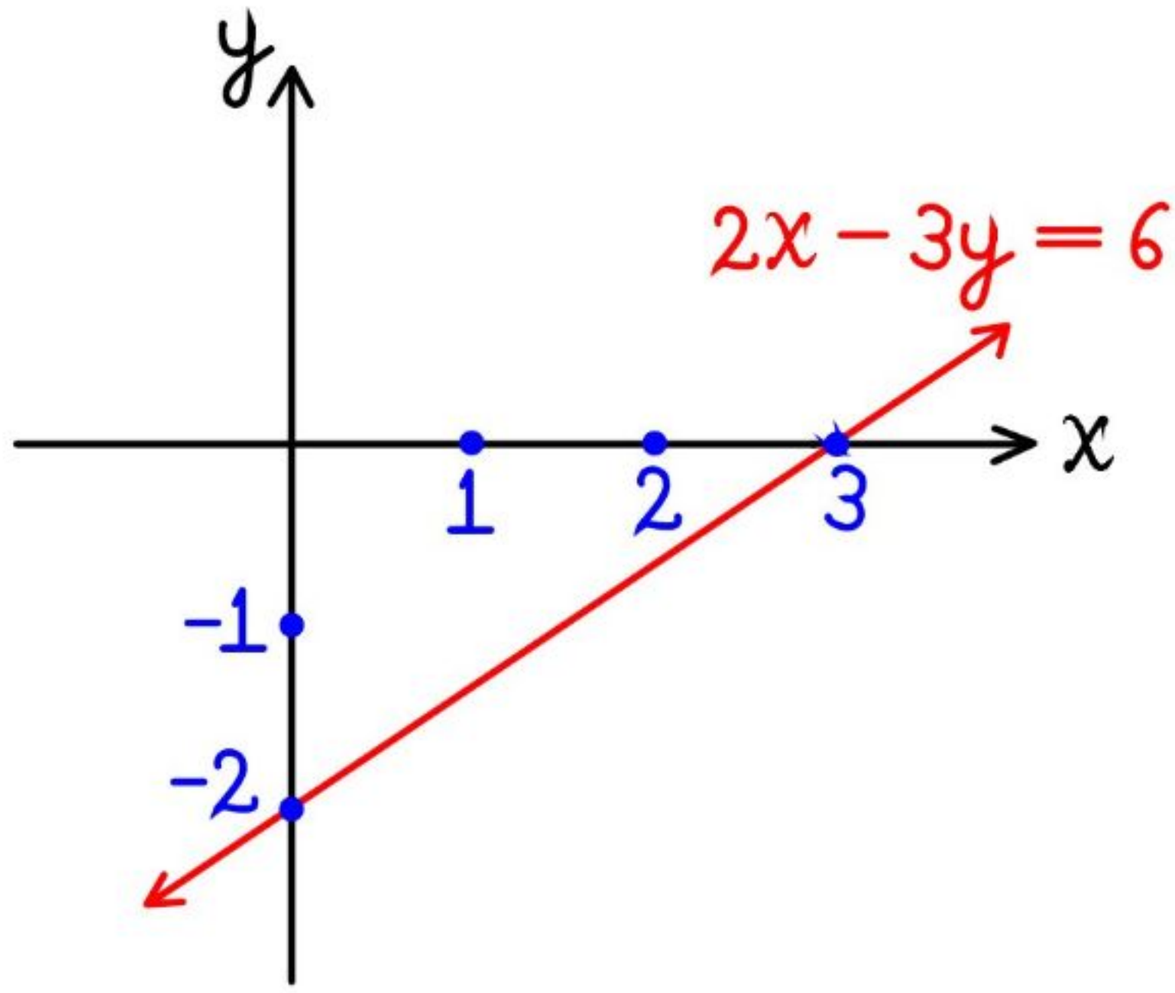
उदा. $2x-3y=6$

$x=0$ पर $y=-2$

$\Rightarrow$ बिन्दु $(0,-2)$

$y=0$ पर $x=3$

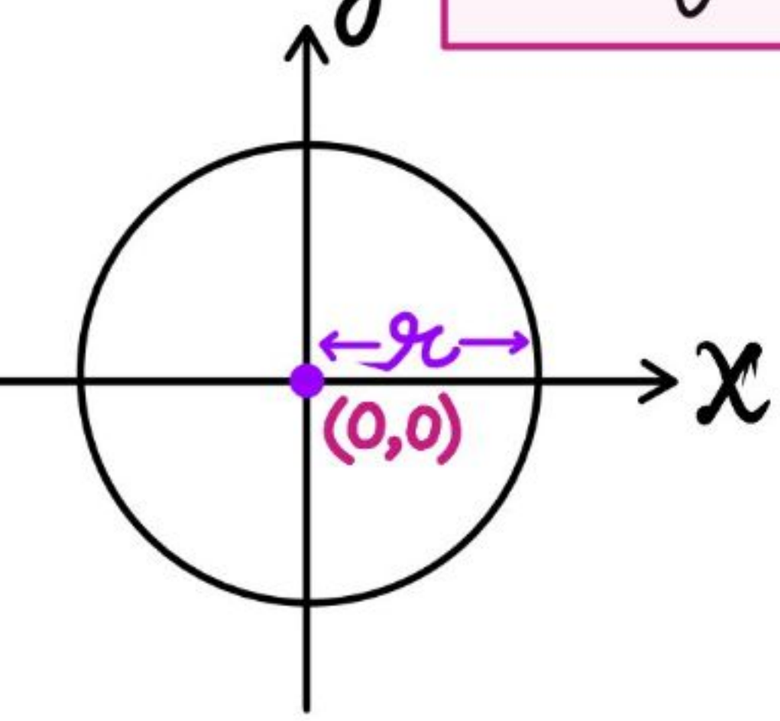
$\Rightarrow$ बिन्दु $(3,0)$



2. वृत्त

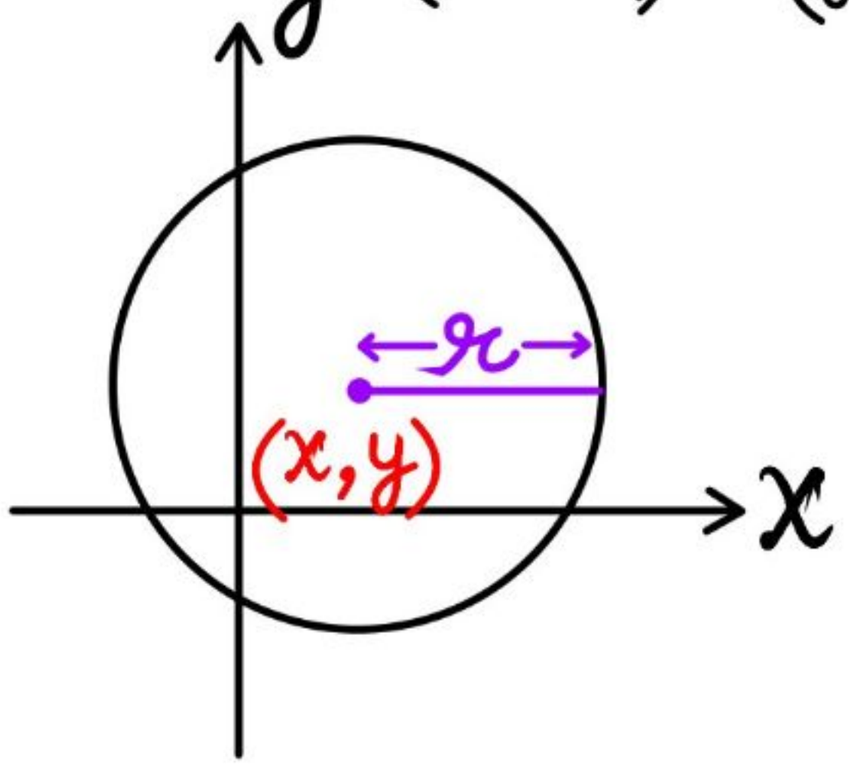
(a) केन्द्र $(0,0)$ तथा त्रिज्या $= r$

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$



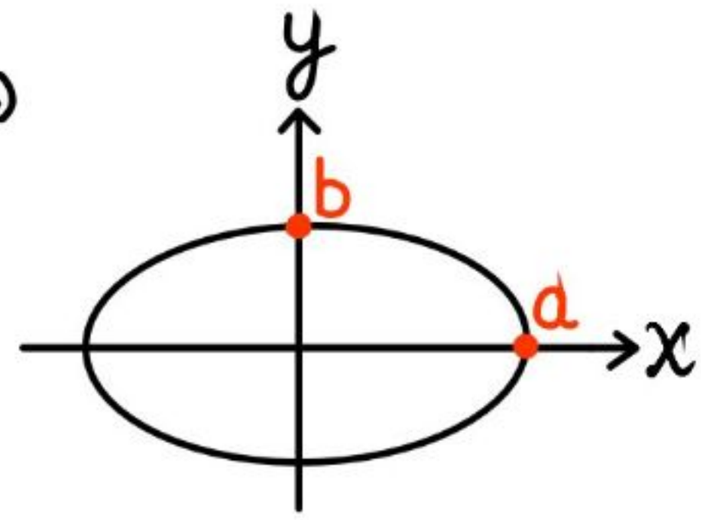
(b) केन्द्र (x_1, y_1) तथा त्रिज्या $= r$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$



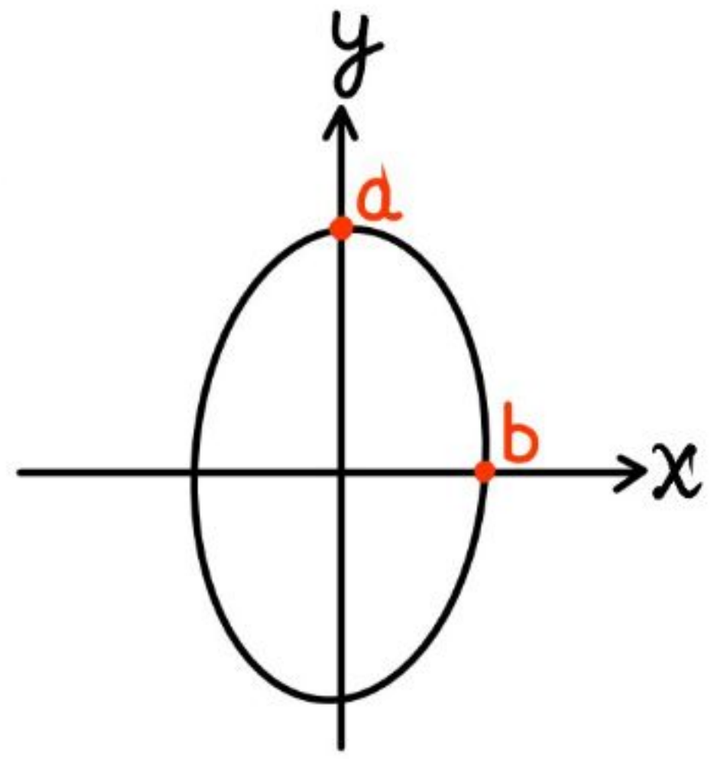
3. दीर्घवृत्त

(a)



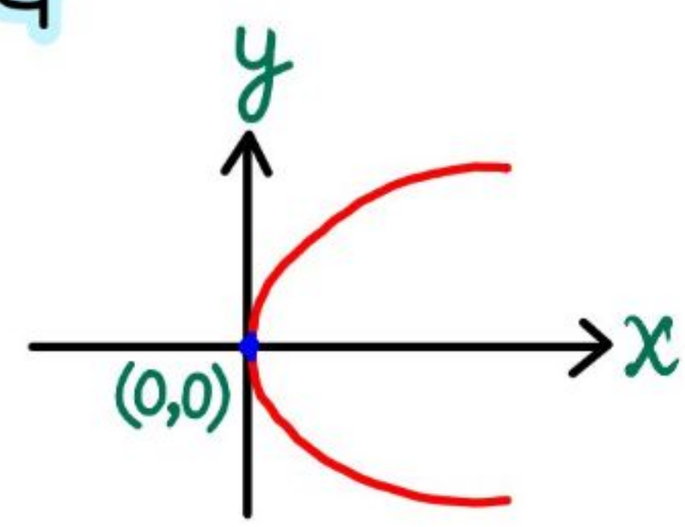
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(b)

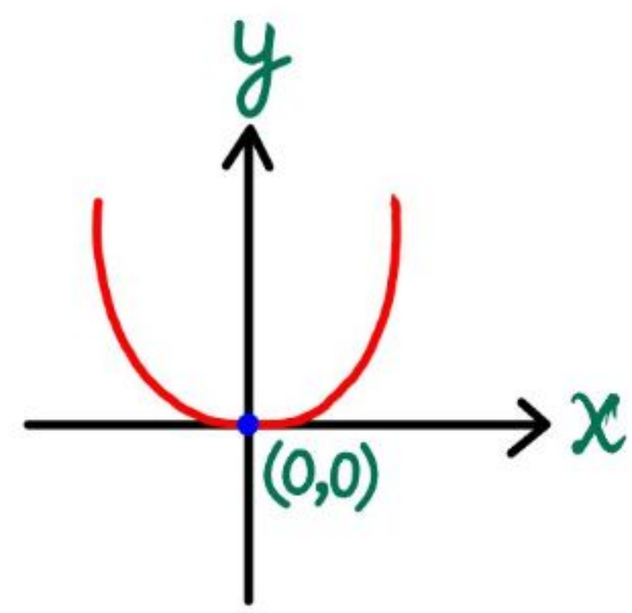


$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

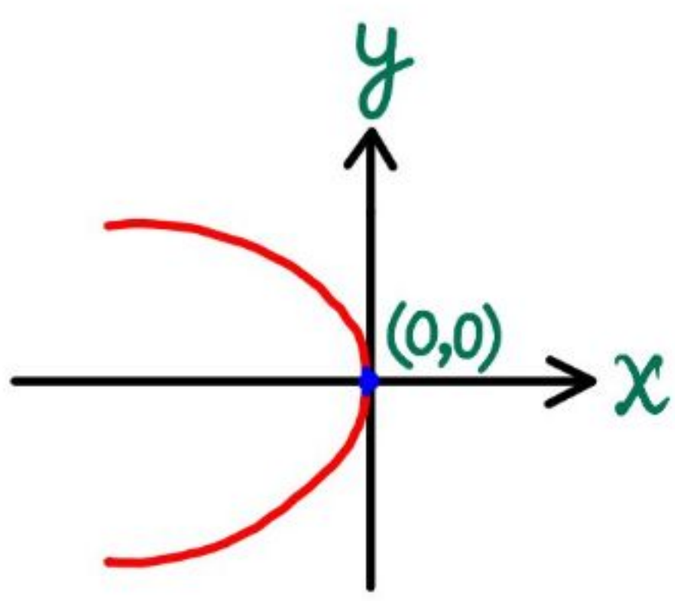
4. परवलय



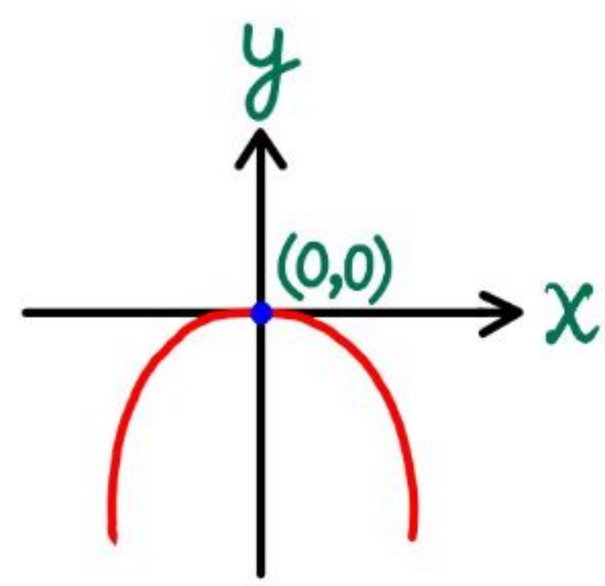
$$y^2 = 4ax$$



$$x^2 = 4ay$$



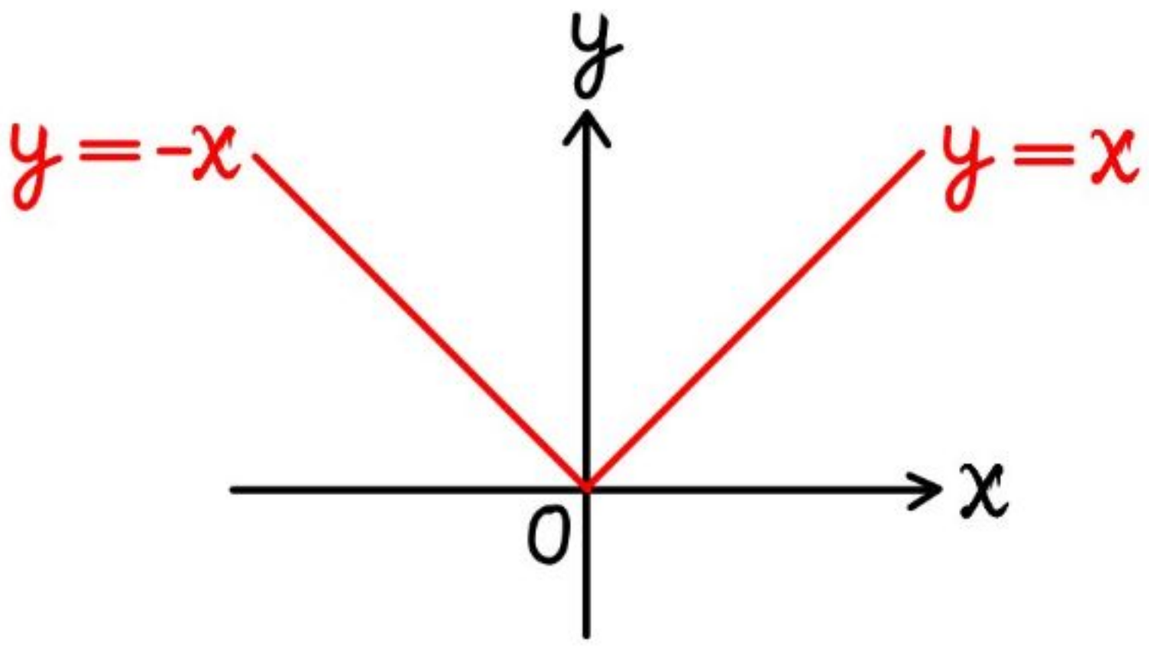
$$y^2 = -4ax$$



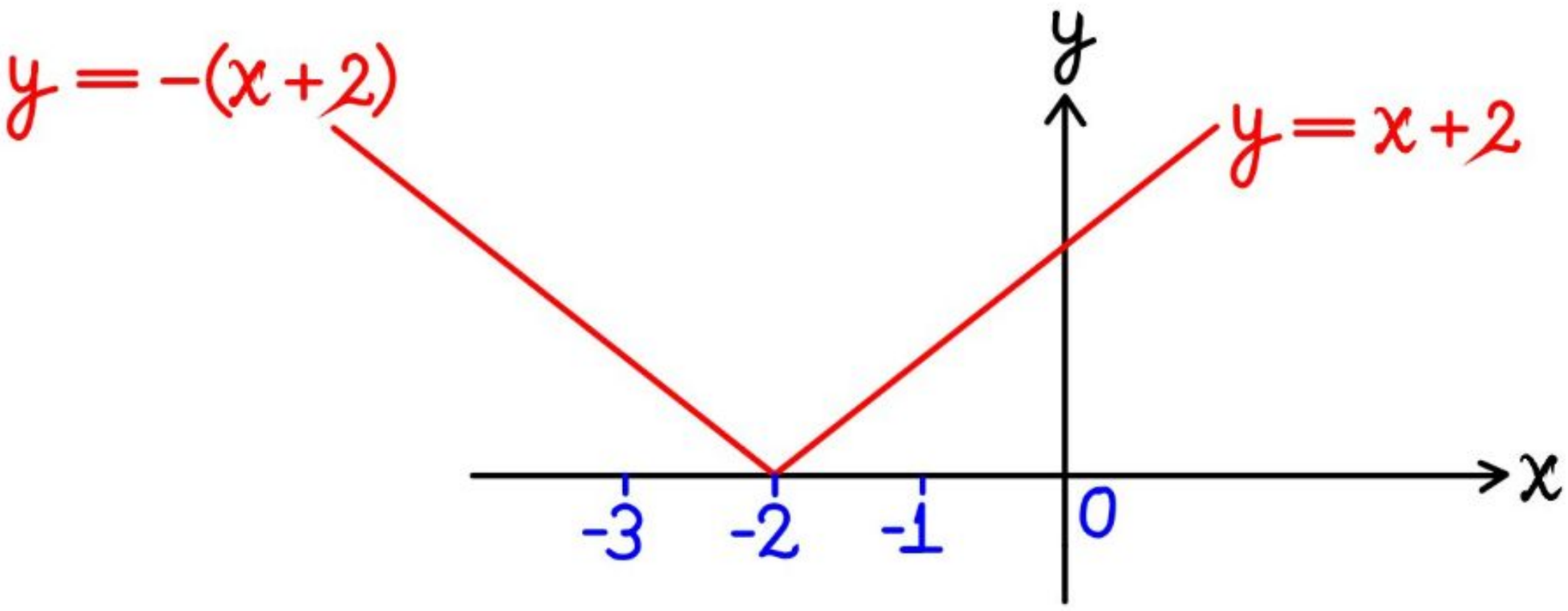
$$x^2 = -4ay$$

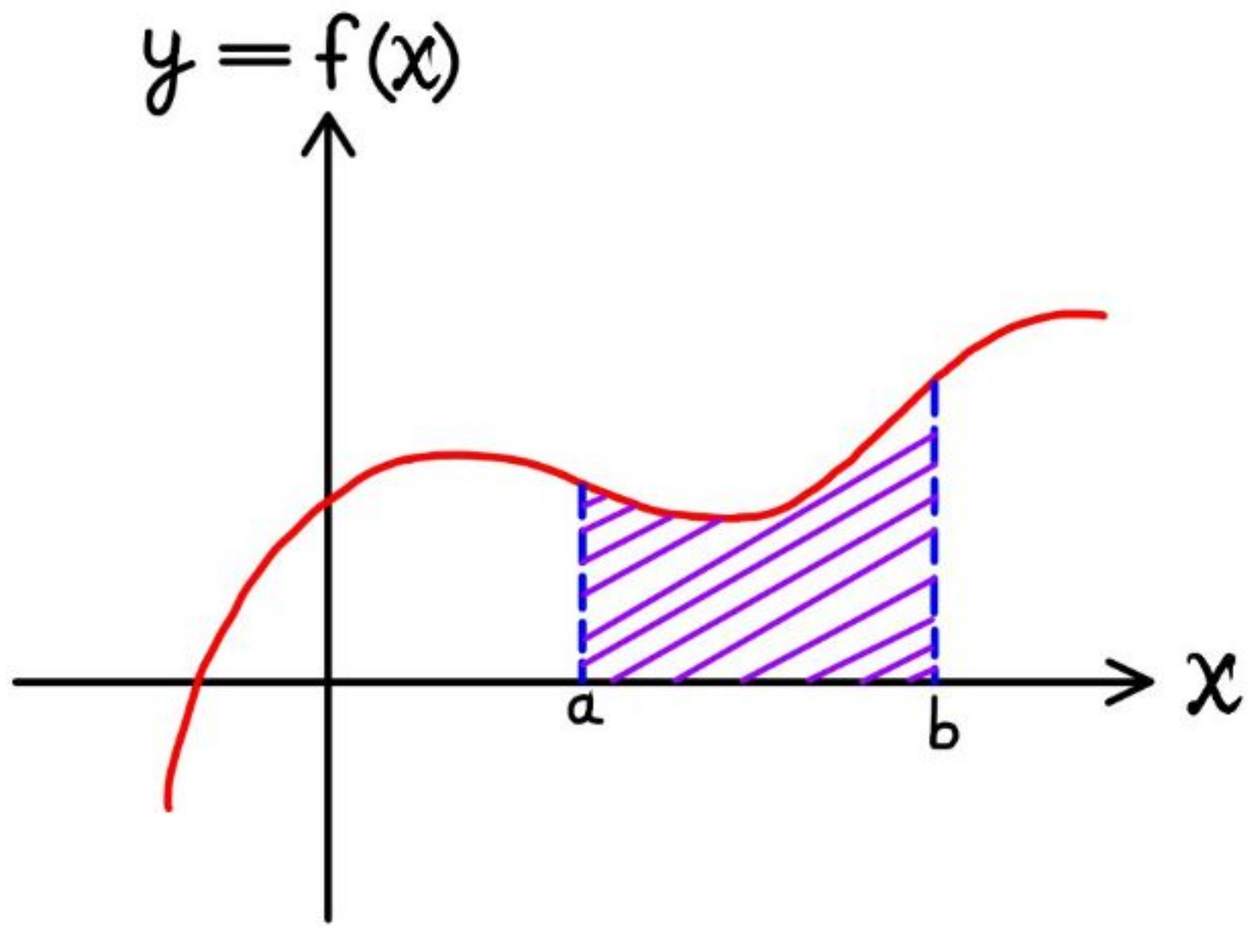
5. मापांक फलन

(i) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x \; ; \; x < 0 \\ x \; ; \; x \geq 0 \end{cases}$

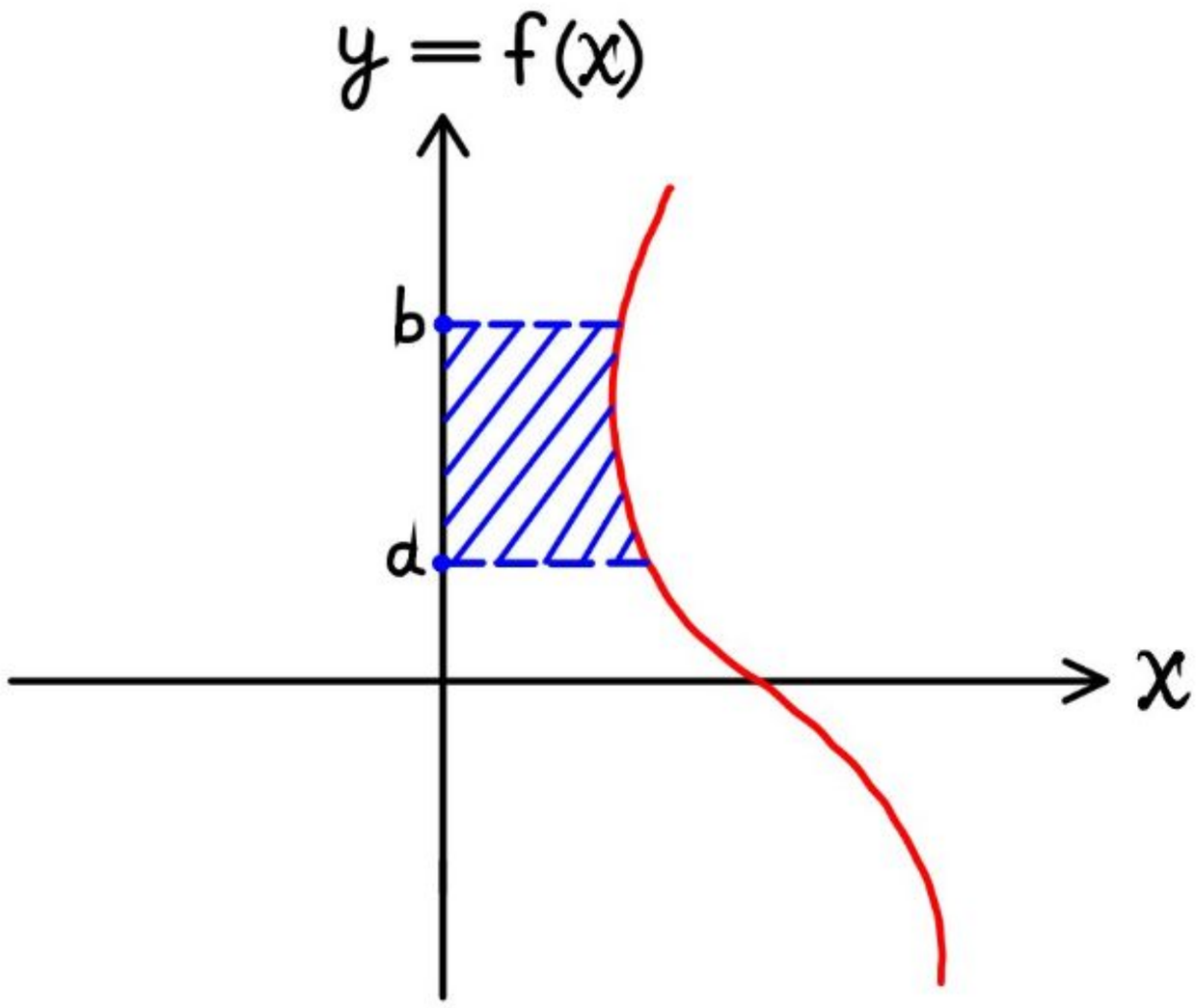


(ii) $y = |x+2| = \begin{cases} -(x+2) \; ; \; x < -2 \\ (x+2) \; ; \; x \geq -2 \end{cases}$





$$\boxed{\text{क्षे.} = \int_a^b y\,dx}$$



$$\boxed{\text{क्षे.} = \int_a^b x\,dy}$$

अवकल समीकरण

- ऐसा समी., जिसमें स्वतंत्र चर (x) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, अवकल समी. कहलाता है।

$$2x + 3y = 5 \longrightarrow$$ अवकल समी. नहीं हैं

$$2x + 3y\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} - 3 = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\sin x . e^y + 9 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^x = 2$$

} अवकल समीकरण

- अवकल समीकरण की कोटि एवं घात –

- अवकल समीकरण की कोटि ⟶ उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि
- अवकल समीकरण की घात ⟶ उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात

- यदि अवकल समीकरण, अवकलजों y', y'', y''' इत्यादि में बहुपद समीकरण हैं तो उसकी घात परिभाषित होगी, अन्यथा नहीं।

- किसी अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) हमेशा धनात्मक पूर्णांक होते हैं।

समघातीय अवकल समीकरण

- फलन $F(x,y)$, n घात का समघातीय फलन कहलाता है यदि,

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y)$$

$\lambda \longrightarrow$ शून्येतर अचर

- फलन $F(x,y)$, n घात का समघातीय फलन कहलाता है यदि,

$$F(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

- फलन $F(x,y)$, n घात का समघातीय फलन कहलाता है यदि,

$$F(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$$

रैखिक अवकल समीकरण

Format I

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \text{——— (1)}$$

$P, Q \longrightarrow x$ के फलन/अचर

Steps

1. $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक 1 बनाना है और फिर P व Q के मान निकालने है।

2. समाकलन गुणक (I.F.) $= e^{\int P dx}$

3. हल, $\boxed{y.IF = \int Q.IF\, dx}$

Format II

$$\frac{dx}{dy} + Px = Q \quad \text{——— (२)}$$

$P, Q \longrightarrow y$ के फलन/अचर

Steps 1. $\frac{dx}{dy}$ का गुणांक 1 बनाना है और फिर P व Q के मान निकालने है।

2. समाकलन गुणक (I.F.) $= e^{\int P dy}$

3. हल, $\boxed{x.IF = \int Q.IF\, dy}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

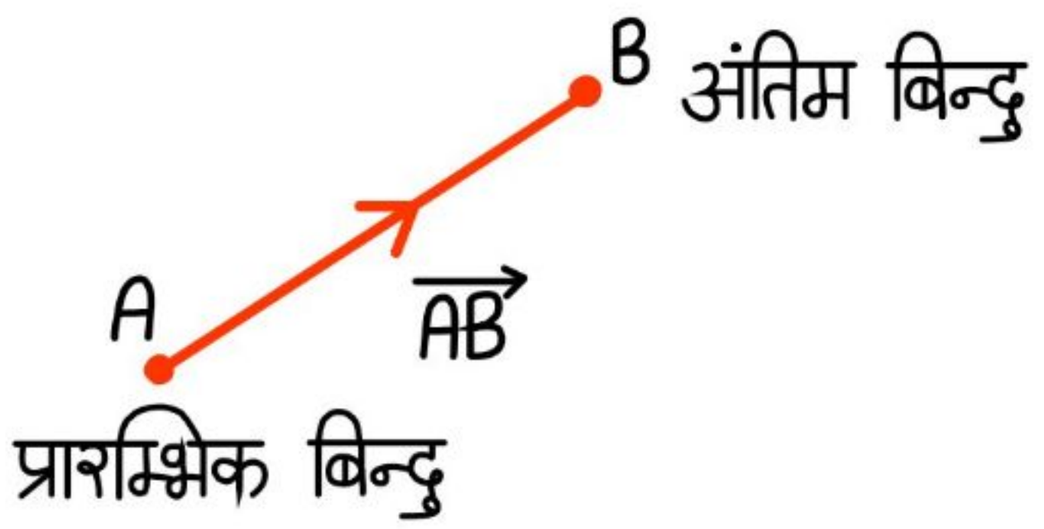
- ऐसा हल जिसमें स्वेच्छ अचर उपस्थित हों, अवकल समी. का व्यापक हल कहलाता है।
- व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त हल, अवकल समी. का विशिष्ट हल कहलाता है।
- व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या, अवकल समी. की कोटि के बराबर होती है।
- विशिष्ट हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या 0 होती है।

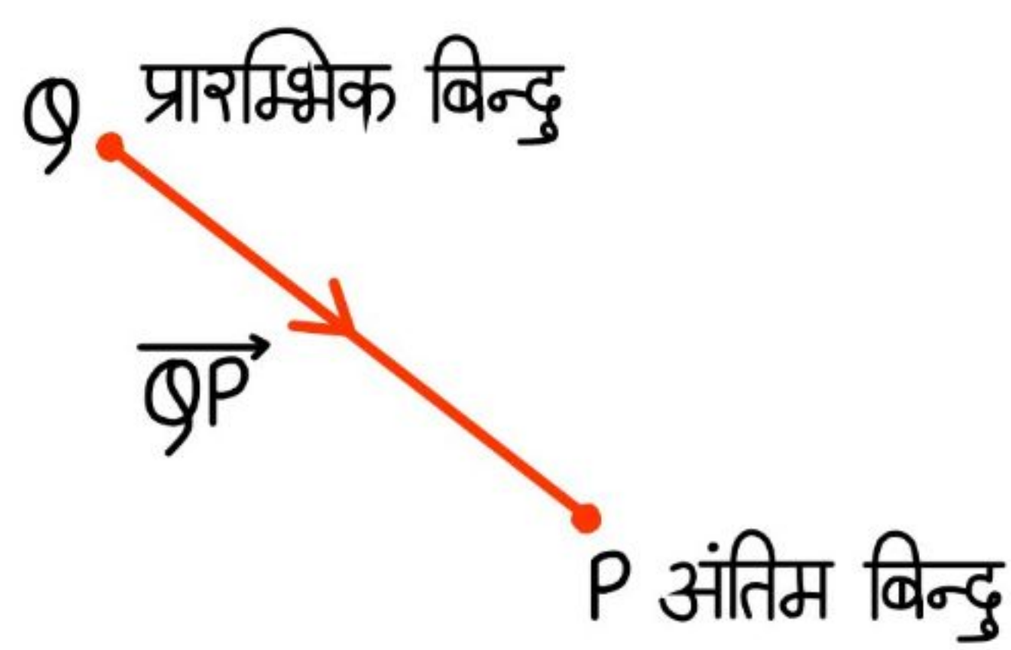
CHAPTER-10
VECTOR ALGEBRA

सदिश बीजगणित

- अदिश राशियाँ → केवल परिमाण
  उदा.→ समय, दूरी, चाल, कार्य, आयतन, घनत्व आदि
- सदिश राशियाँ → दिशा तथा परिमाण दोनों
  उदा.→ विस्थापन, बल, वेग, त्वरण आदि

सदिश :- प्रारम्भिक बिन्दु से अंतिम बिन्दु का विस्थापन





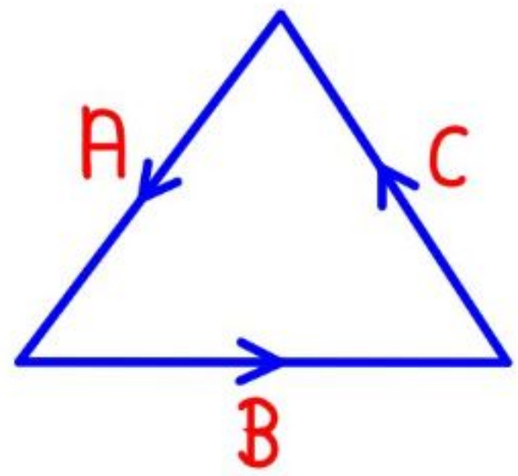
$|\overrightarrow{AB}| = AB =$ AB की लम्बाई (परिमाण)

$|\overrightarrow{QP}| = QP =$ QP की लम्बाई (परिमाण)

सदिशों के प्रकार

शून्य सदिश (Zero/Null vector)

- प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु संपाती
- परिमाण (लम्बाई) शून्य
- $\vec{0}$ से निरूपण

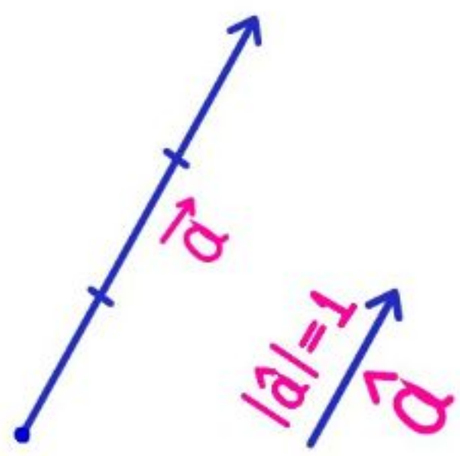


उदा. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

मात्रक सदिश (Unit vector)

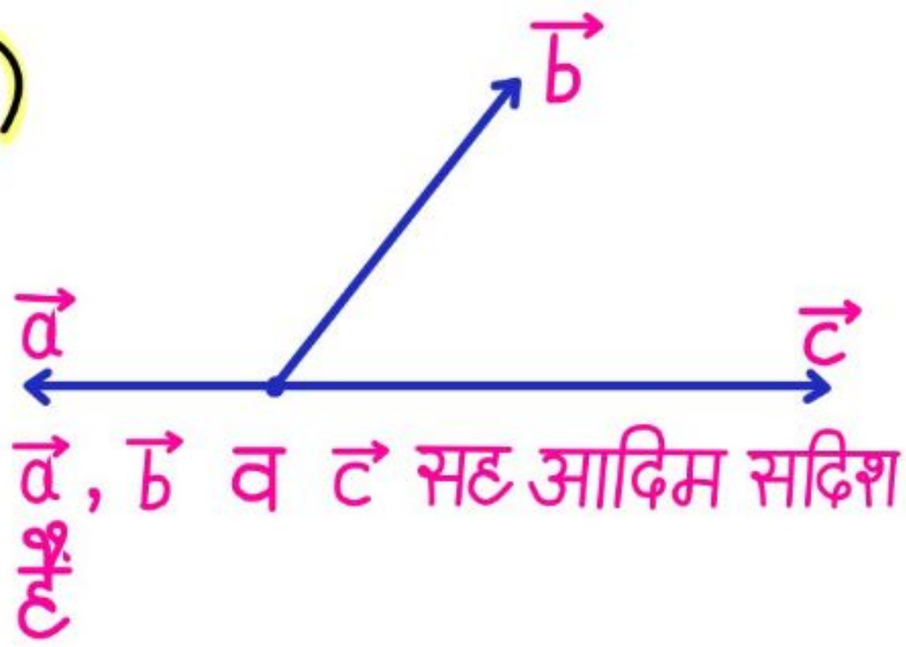
- परिमाण 1 होता है।
- $\vec{a}$ का मात्रक सदिश $\hat{a}$ से दर्शाया जाता है।
- $\boxed{\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$



- $\hat{a} \Rightarrow \vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश

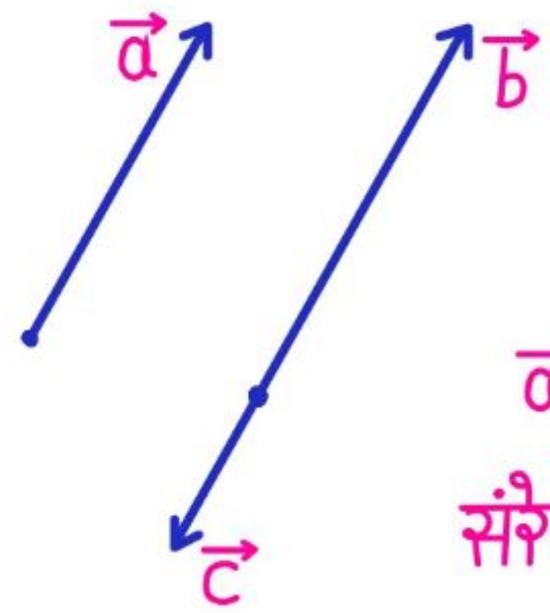
सह आदिम सदिश (Co-initial vectors)

- दो अथवा अधिक सदिश जिनका एक ही प्रारम्भिक बिन्दु हो।



संरेख सदिश (Collinear vectors)

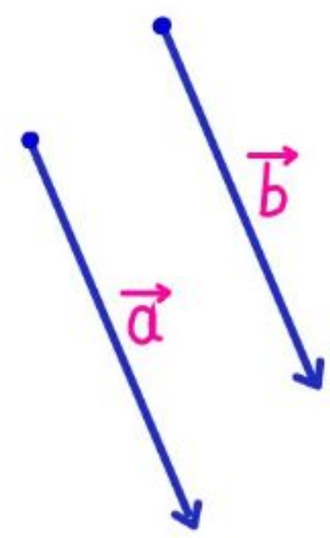
→ दो अथवा अधिक सदिश जो एक ही रेखा के समान्तर हैं।
(परिमाण व दिशा कुछ भी हो)



$\vec{a}, \vec{b}$ व $\vec{c}$ संरेख सदिश हैं।

समान सदिश (Equal vectors)

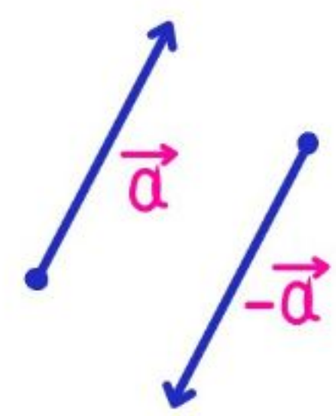
→ परिमाण तथा दिशा दोनों समान (प्रारम्भिक बिन्दु अलग-अलग हो सकते हैं)



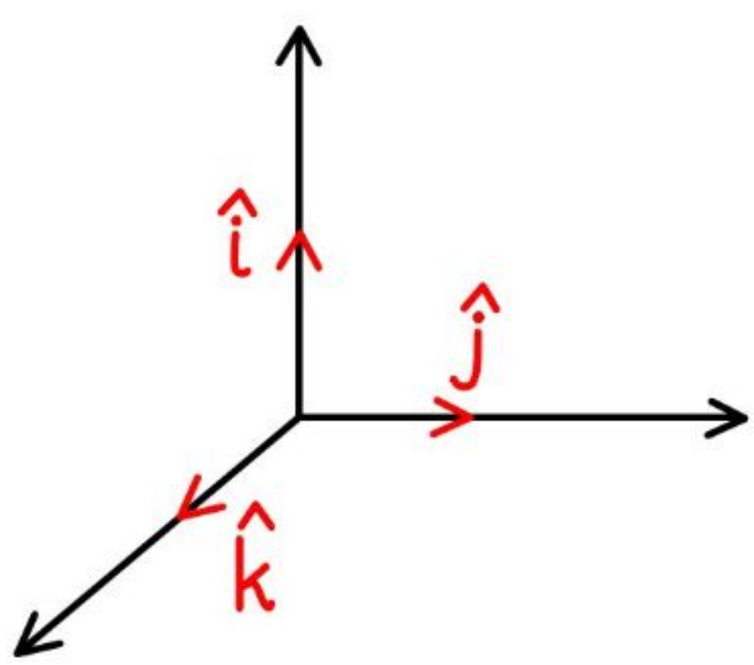
$\vec{a} = \vec{b}$

ऋणात्मक सदिश (Negative of a vector)

→ परिमाण समान तथा दिशा विपरीत



x, y तथा z अक्ष की दिशा में मात्रक सदिश



x अक्ष की दिशा में मात्रक सदिश $= \hat{i}$

y अक्ष की दिशा में मात्रक सदिश $= \hat{j}$

z अक्ष की दिशा में मात्रक सदिश $= \hat{k}$

$$\boxed{\hat{i} = \hat{j} = \hat{k} = 1}$$

दिक् – कोसाइन तथा दिक् – अनुपात

सदिश, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

सदिश का x अक्ष के साथ कोण $= \alpha$
सदिश का y अक्ष के साथ कोण $= \beta$
सदिश का z अक्ष के साथ कोण $= \gamma$
} दिक् – कोण

दिक् – कोसाइन $\rightarrow$ l, m, n

$\boxed{l = \cos\alpha}$, $\boxed{m = \cos\beta}$, $\boxed{n = \cos\gamma}$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$
$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

दिक् – अनुपात $\rightarrow$ a, b, c

$a = x$, $b = y$, $c = z$

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} , m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} , n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

NOTE

(i) $\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

तथा $\hat{r} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$

(ii) दिक् – अनुपात $\rightarrow$ किसी सदिश के अदिश घटक

तथा दिक् – कोसाइन $\rightarrow$ किसी मात्रक सदिश के अदिश घटक

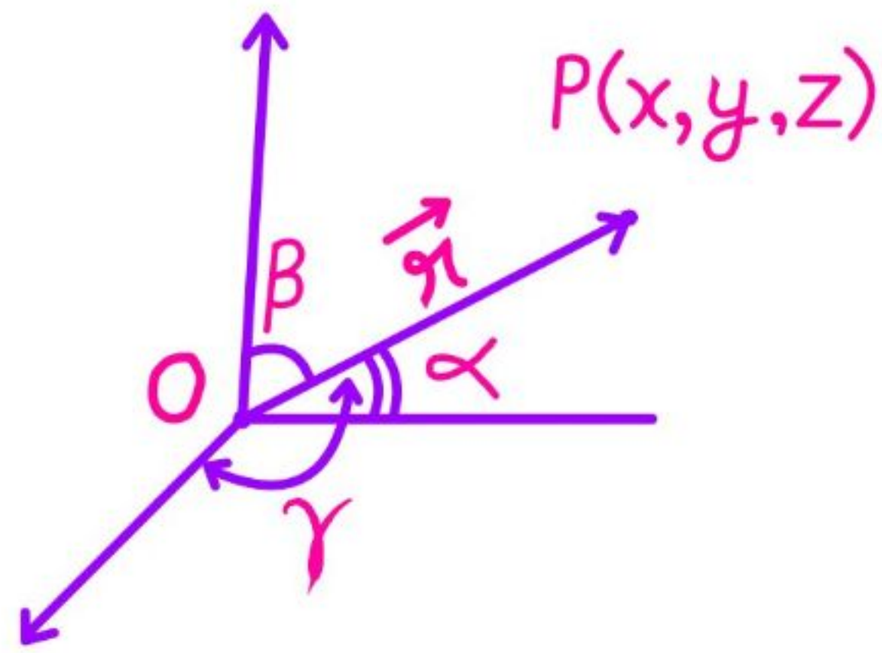
किसी बिन्दु का स्थिति सदिश →

- मूल बिंदु के सापेक्ष बिंदु का विस्थापन
- P का स्थिति सदिश = $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

- $\overrightarrow{OP}$ का परिमाण (लम्बाई)

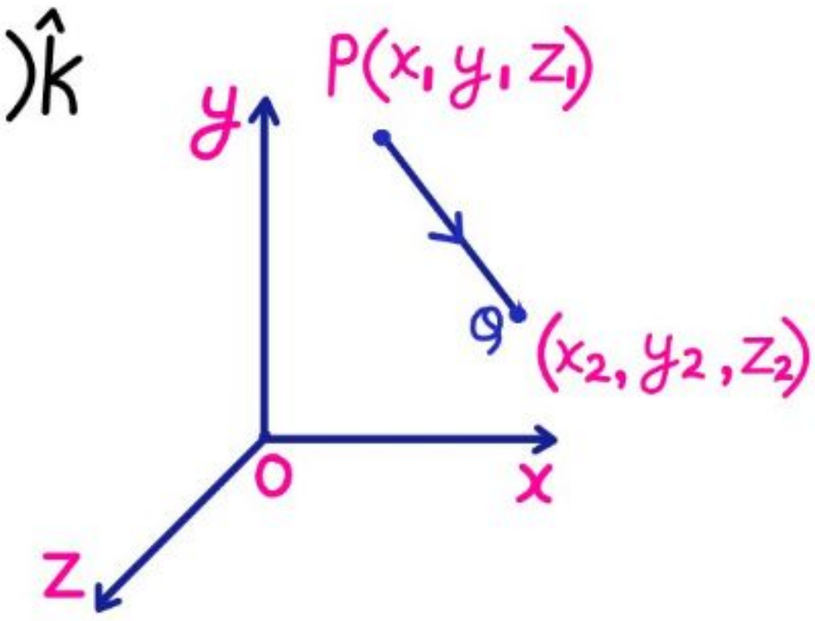
$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



दो बिन्दुओं को मिलाने वाला सदिश

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

- $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$
- $\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- $\overrightarrow{PQ}$ के दिक् – अनुपात = a, b, c
- $a = (x_2 - x_1)$, $b = (y_2 - y_1)$, $c = (z_2 - z_1)$



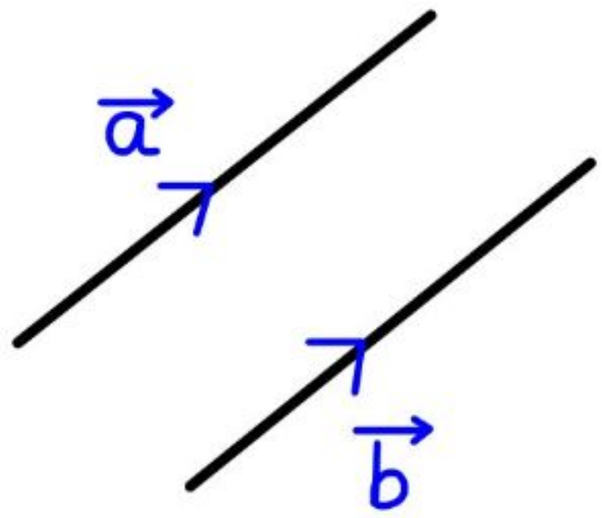
PQ के दिक् – कोसाइन → l, m, n

$$l = \frac{(x_2 - x_1)}{|\overrightarrow{PQ}|} \quad m = \frac{(y_2 - y_1)}{|\overrightarrow{PQ}|} \quad n = \frac{(z_2 - z_1)}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

सदिश $\overrightarrow{PQ}$ का मतलब है बिन्दु P से Q का विस्थापन

- $\overrightarrow{QP} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

समान सदिश



- लम्बाई व दिशा दोनों समान
- $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ तथा $\hat{a} = \hat{b}$

माना, $\vec{a} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$

तथा $\vec{b} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$

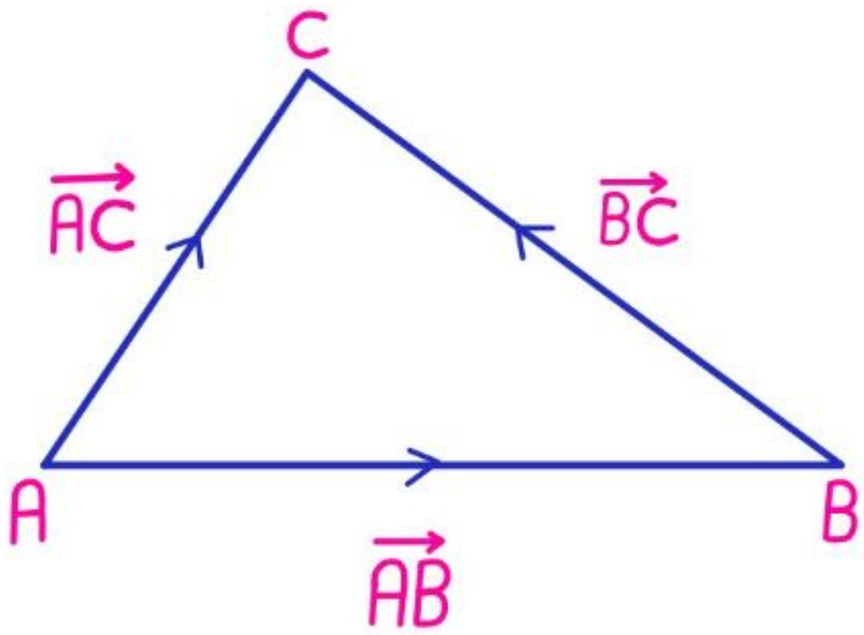
यदि $\vec{a} = \vec{b}$

$$\Rightarrow a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = a_2}$ तथा $\boxed{b_1 = b_2}$ तथा $\boxed{c_1 = c_2}$

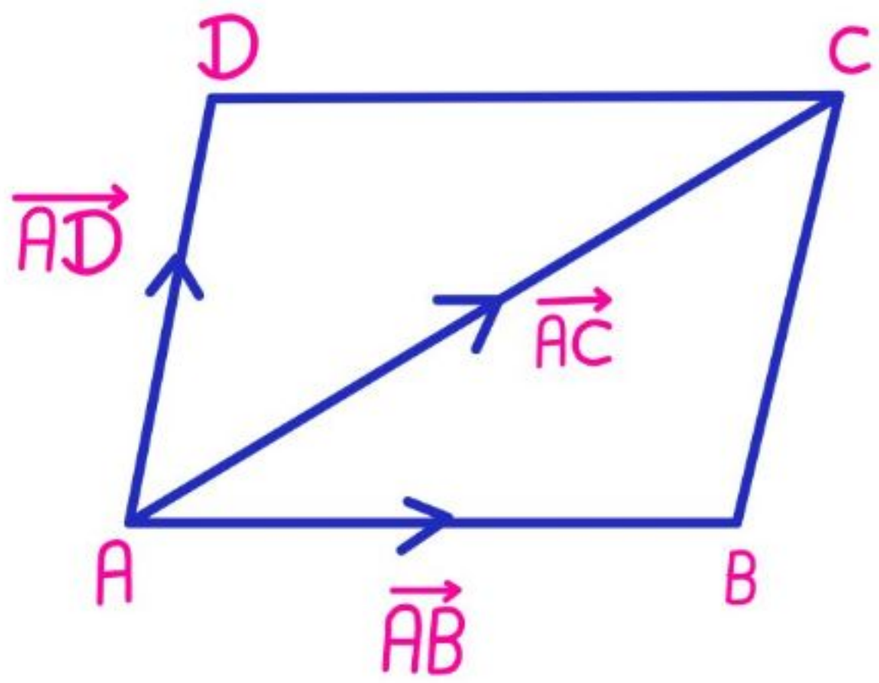
सदिशों का योगफल (Addition of Vector)

त्रिभुज नियम



$$\boxed{\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}}$$

समान्तर चतुर्भुज नियम



$$\boxed{\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}}$$

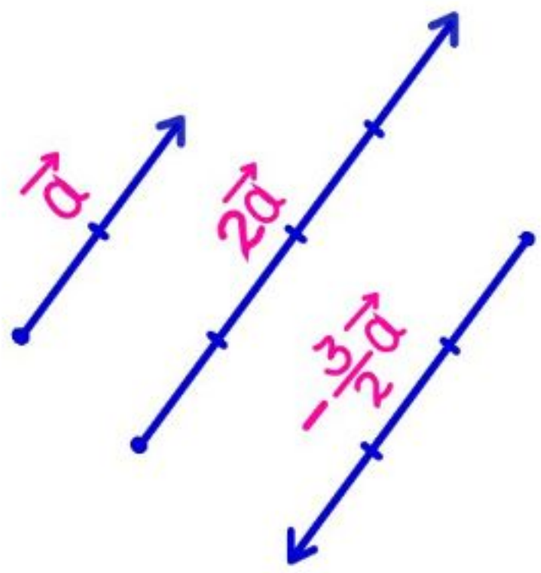
सदिश योगफल के गुणधर्म →

सदिश योगफल, क्रमविनिमेयता व साहचर्यता दोनों नियम का पालन करता है|

1. क्रमविनिमेयता → $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. साहचर्यता → $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

एक अदिश से सदिश का गुणन →

एक समांतर सदिश प्राप्त होगा|



- यदि अदिश धनात्मक है तो केवल परिमाण बदलेगा, दिशा वही रहेगी
- यदि अदिश ऋणात्मक है तो परिमाण व दिशा (विपरीत) दोनों बदलेंगे

सदिश के घटक (Components of a Vector)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

अदिश घटक
x, y, z

सदिश घटक
$x\hat{i}, y\hat{j}, z\hat{k}$

संरेखता की शर्त (Condition for Collinearity)

$\vec{a} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ तथा $\vec{b} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ संरेख या समान्तर

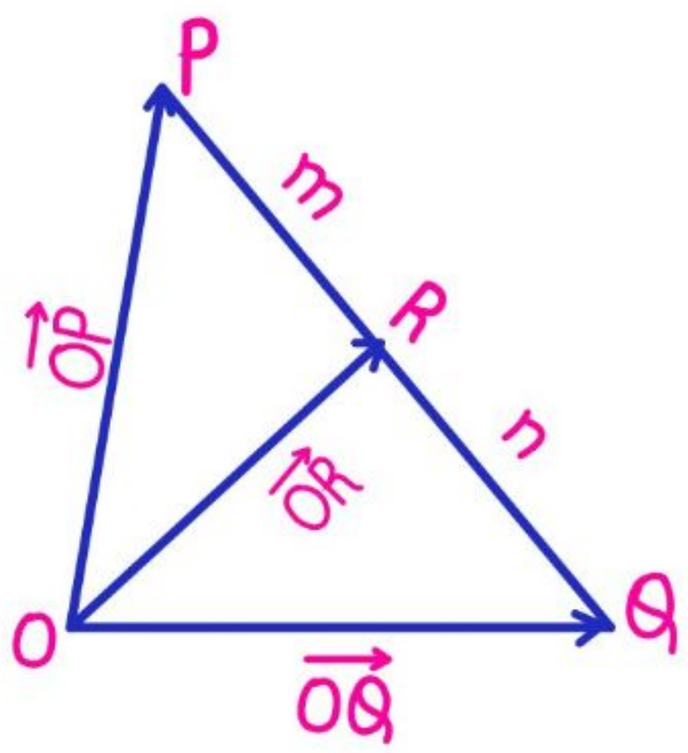
होंगे यदि $\boxed{\vec{a} = \lambda\vec{b}}$ या $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}}$

(सदिश रूप) (कार्तीय रूप) ($\lambda \rightarrow$ शून्येतर अदिश)

खण्ड सूत्र (Section Formula)

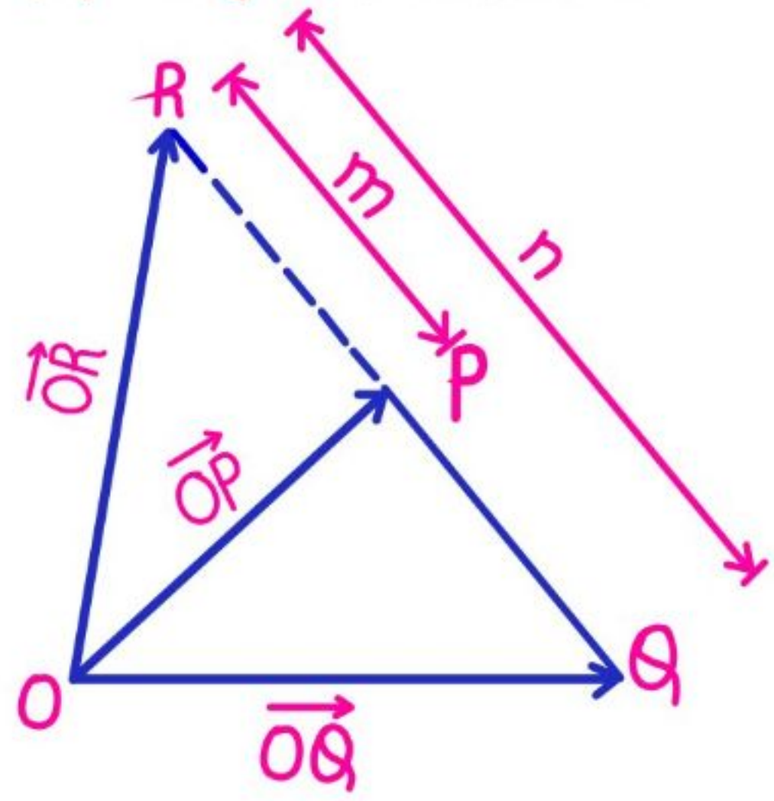
माना $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{PQ}$ को m:n के अनुपात में विभाजित करता है

(i) आन्तरिक विभाजन



$$\overrightarrow{OR} = \frac{m(\overrightarrow{OQ}) + n(\overrightarrow{OP})}{m+n}$$

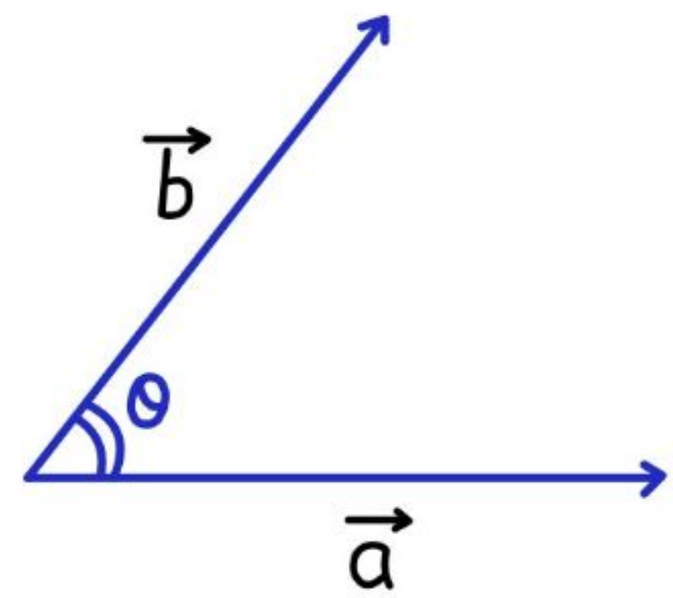
(ii) बाह्य विभाजन



$$\overrightarrow{OR} = \frac{m(\overrightarrow{OQ}) - n(\overrightarrow{OP})}{m-n}$$

दो सदिशों का गुणन (Product of a Vector)

अदिश गुणन (Scalar (dot) Product)

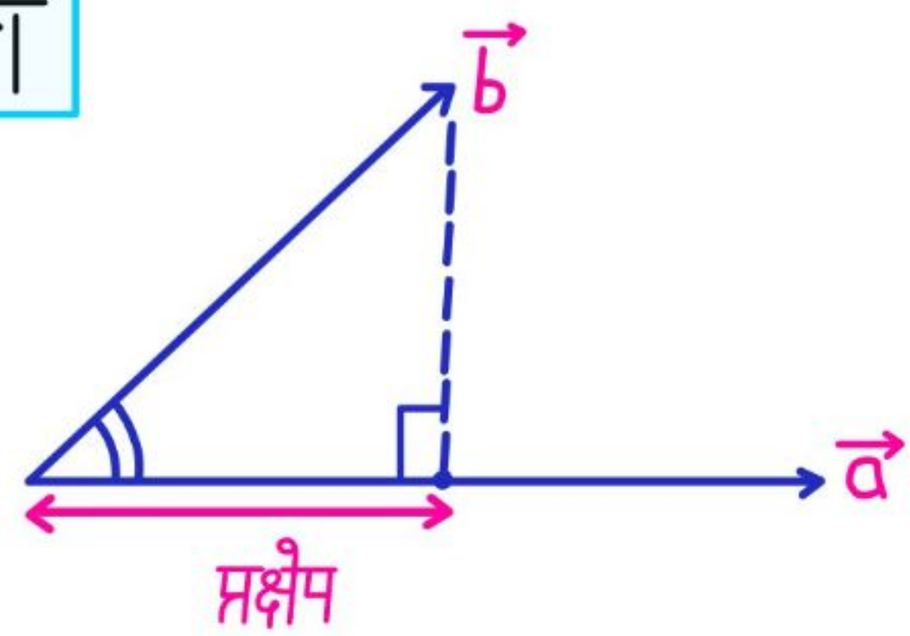


- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$
- $\vec{a}.\vec{b}$ एक अदिश राशि है।
- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
- यदि $\vec{a}$ व $\vec{b}$ लम्बवत हैं तो $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = 0}$
- $|\vec{a}|^2 = \vec{a}.\vec{a}$
- दो सदिशों के बीच कोण $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$

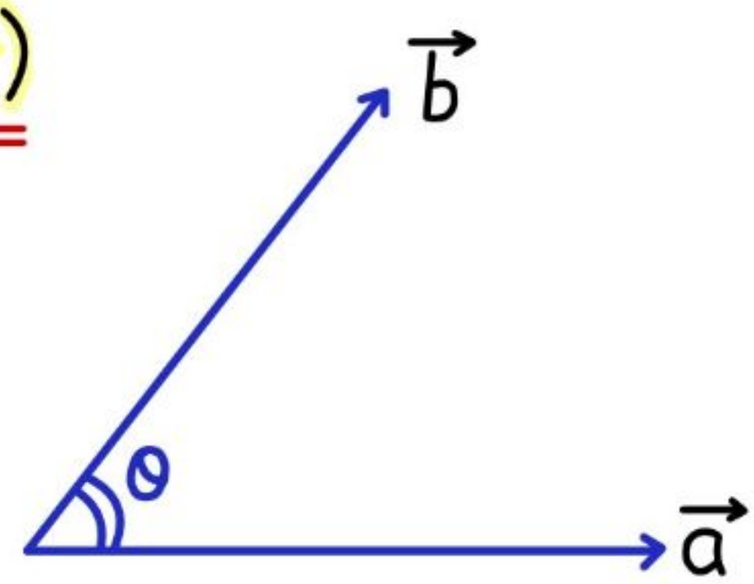
$\hat{i}.\hat{j} = 0$	$\hat{i}.\hat{i} = 1$
$\hat{j}.\hat{k} = 0$	$\hat{j}.\hat{j} = 1$
$\hat{k}.\hat{i} = 0$	$\hat{k}.\hat{k} = 1$

- $\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप

$$\boxed{\text{प्रक्षेप} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \hat{a}.\vec{b}}$$



सदिश गुणनफल (vector/cross Product)



- $\vec{a}\times\vec{b} = \underbrace{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta}_{\text{परिमाण}}\ \underset{\text{दिशा}}{\hat{n}}$

$\hat{n} \rightarrow \vec{a}$ व $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत मात्रक सदिश हैं।

- $(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत सदिश हैं।

$(\vec{a}\times\vec{b}) \perp \vec{a}$ तथा $(\vec{a}\times\vec{b}) \perp \vec{b}$

→ $(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{b}\times\vec{a})$ $\quad$ $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{b}\times\vec{a}|$

→ यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेख हैं तो $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}\times\vec{b} \rightarrow$ सदिश राशि

→ दो सदिशों के बीच कोण, $\sin\theta = \dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

→ यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ हैं

$$\text{तो } \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

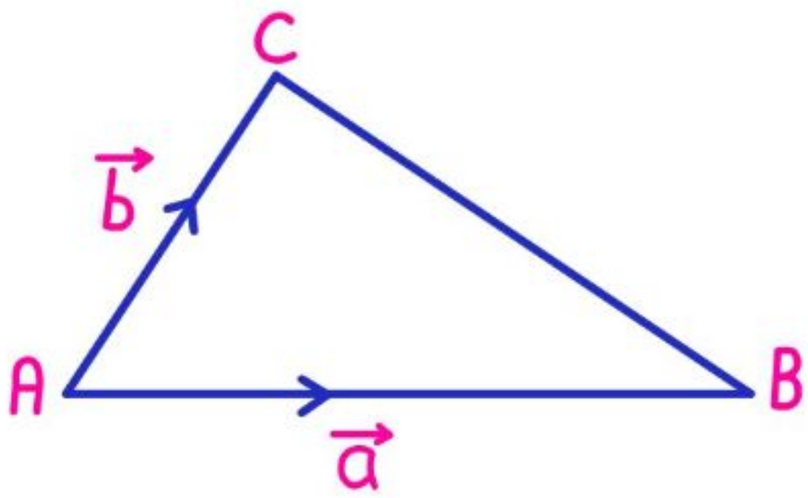
$\hat{i}\times\hat{i} = \vec{0}$

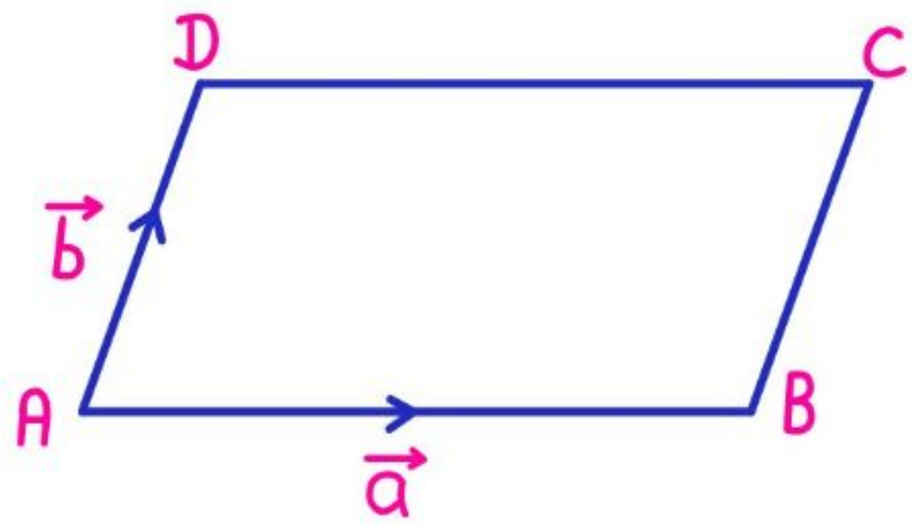
$\hat{j}\times\hat{j} = \vec{0}$

$\hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$

→ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

→ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a}\times\vec{b}|$



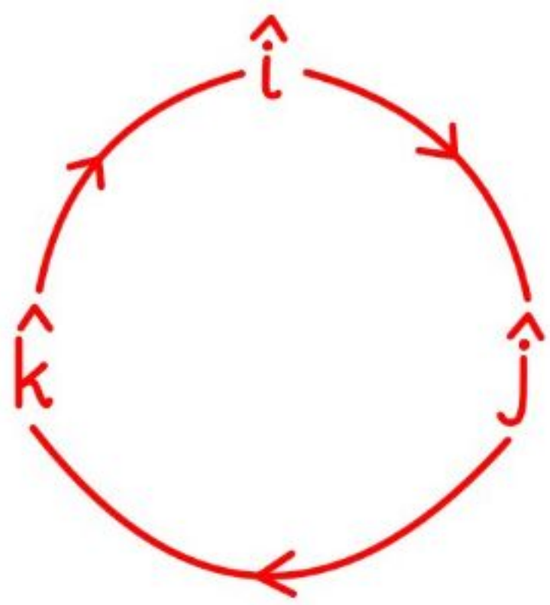


→

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$

$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$



$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$

$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

प्रश्नावली ।।

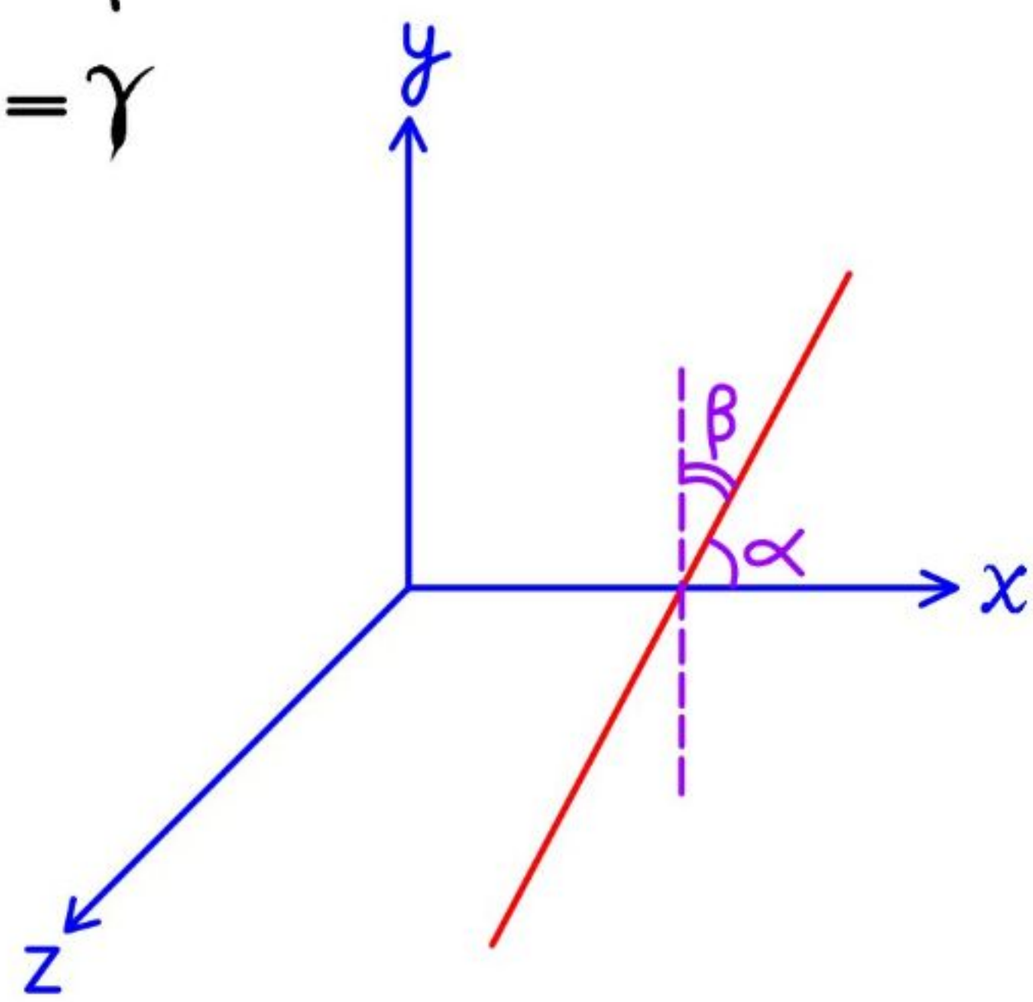
त्रिविमीय ज्यामिति

रेखा के दिक् – कोसाइन और दिक् – अनुपात

1. ▪ दिक् – अनुपात → a, b, c
   ▪ दिक् – कोसाइन → l, m, n

दिक् – अनुपातों को दिक् – संख्याएँ भी कहते हैं।

2. ▪ रेखा का x अक्ष के साथ कोण $= \alpha$
   ▪ रेखा का y अक्ष के साथ कोण $= \beta$
   ▪ रेखा का z अक्ष के साथ कोण $= \gamma$



3. ▪ $l = \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
   ▪ $m = \cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
   ▪ $n = \cos\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

या

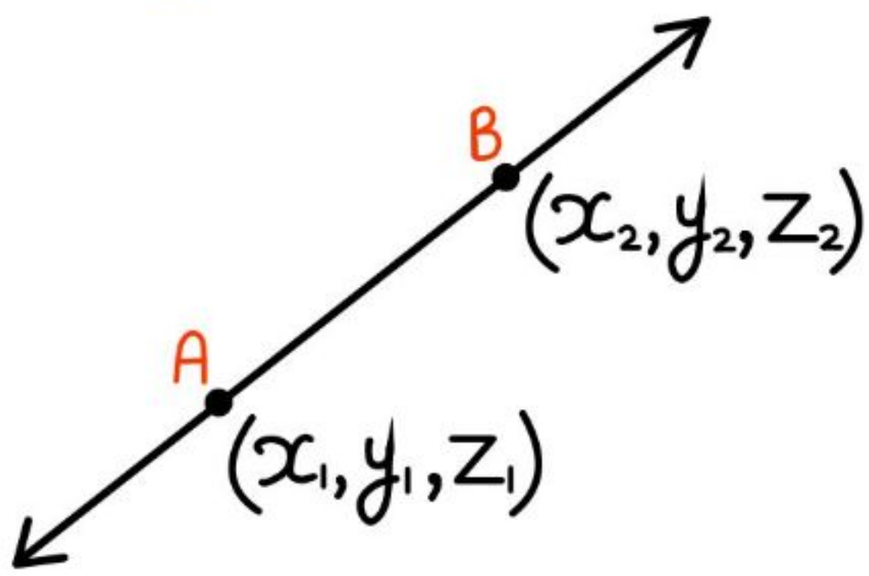
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

4. ▪ x अक्ष के दिक् – कोसाइन $= 1, 0, 0$
   ▪ y अक्ष के दिक् – कोसाइन $= 0, 1, 0$
   ▪ z अक्ष के दिक् – कोसाइन $= 0, 0, 1$

5. ▪ रेखा के समा. सभी सदिशों के दिक् – अनुपात, रेखा के दिक् – अनुपात कहलाते हैं।

▪ रेखा के समा. अनन्त सदिश होते हैं। अतः रेखा के अनन्त दिक् – अनुपात होते हैं।

दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक् – कोसाइन और दिक् – अनुपात →



$$a = x_2 - x_1$$
$$b = y_2 - y_1$$
$$c = z_2 - z_1$$

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$

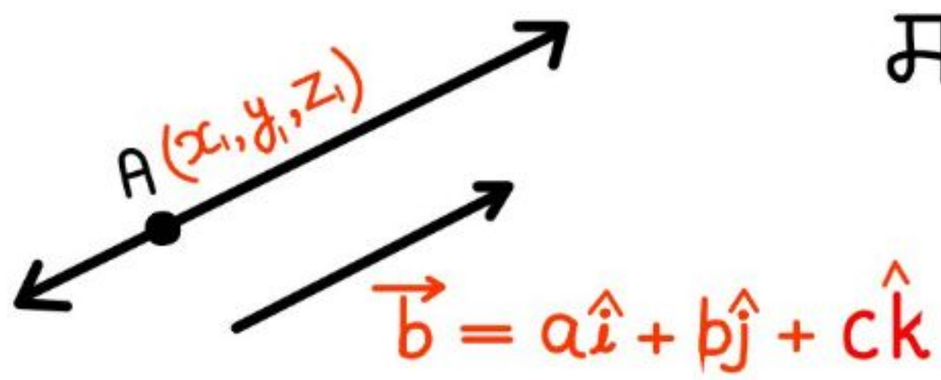
$$m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$

$$n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{(z_2 - z_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$

	सदिश	रेखा
दिक् – कोण	α, β, γ (एक समूह)	α, β, γ तथा $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ (दो समूह)
दिक् – अनुपात	a , b व c (एक समूह)	$l = \pm\cos\alpha$ $m = \pm\cos\beta$ $n = \pm\cos\gamma$ (दो समूह)
दिक् – कोसाइन	$l = \cos\alpha$ $m = \cos\beta$ $n = \cos\gamma$ (एक समूह)	$\left.\begin{array}{l} a = \lambda l \\ b = \lambda m \\ c = \lambda n \end{array}\right\} \lambda \in R_0$ (अनन्त समूह)

अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण

1. दिए गए बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का समीकरण



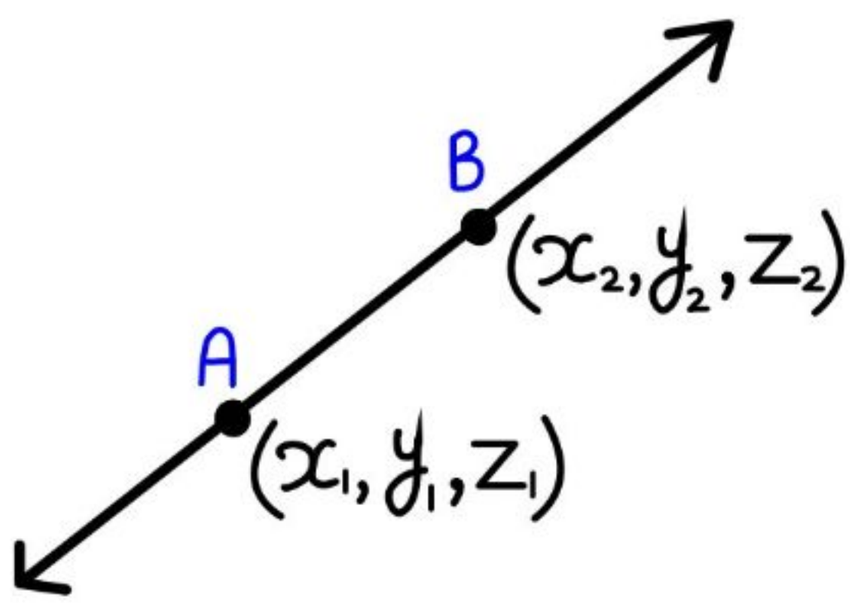
माना, बिन्दु A का स्थिति सदिश $= \vec{a}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

रेखा का समीकरण, $\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}}$ सदिश रूप

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$ कार्तीय रूप

2. दो दिए गए बिंदुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

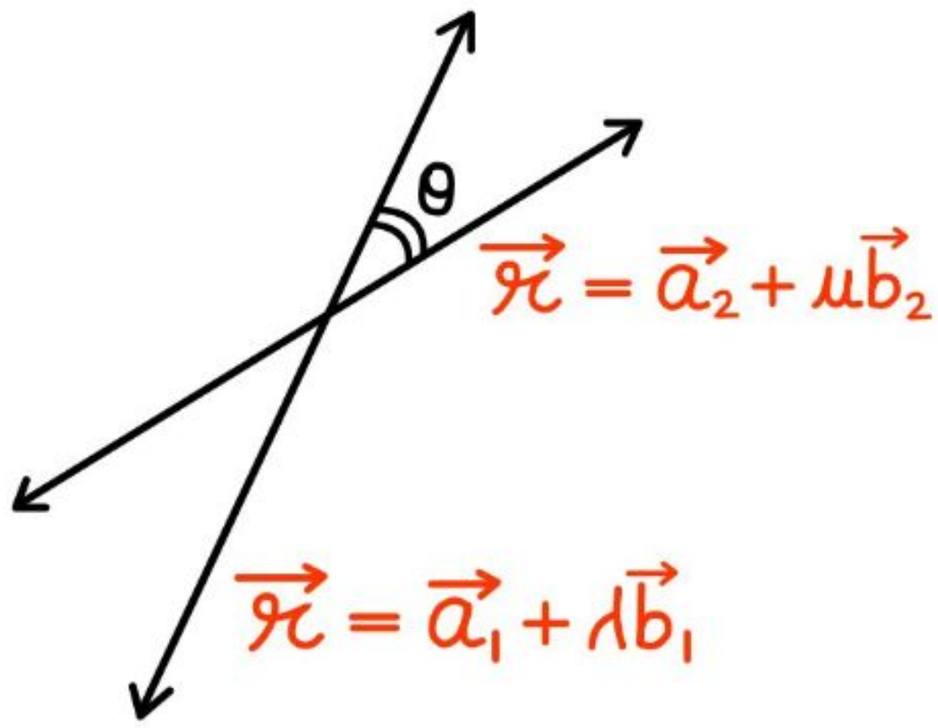
$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

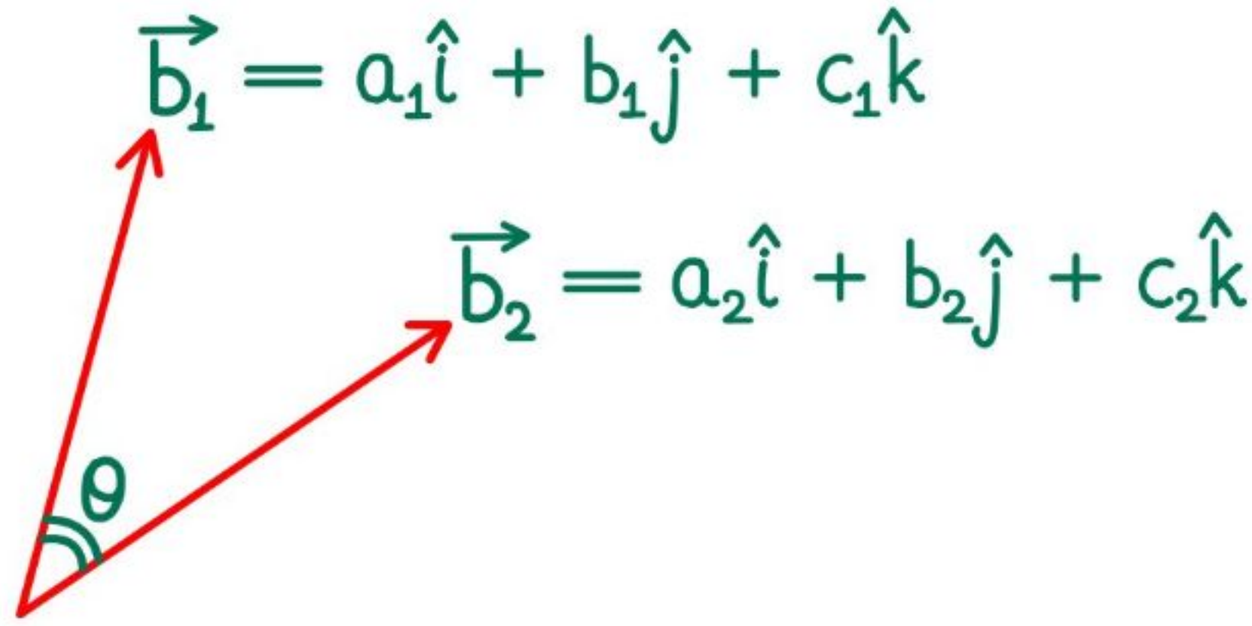
रेखा का समीकरण, $\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})}$ सदिश रूप

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$ कार्तीय रूप

दो रेखाओं के बीच कोण

(i) दो रेखाओं के बीच कोण = दोनों रेखाओं के समान्तर सदिशों के बीच कोण





$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right|$$

(ii) समांतर रेखाओं की शर्त →

$\vec{b}_1 = \lambda\vec{b}_2$ या $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

(iii) लम्बवत रेखाओं की शर्त →

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$ या $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

दो रेखाओं के बीच दूरी (न्यूनतम दूरी)

विषमतलीय रेखाएँ

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$$

$$\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda \vec{b_2}$$

$$\boxed{\text{दूरी} = \left| \frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|}$$

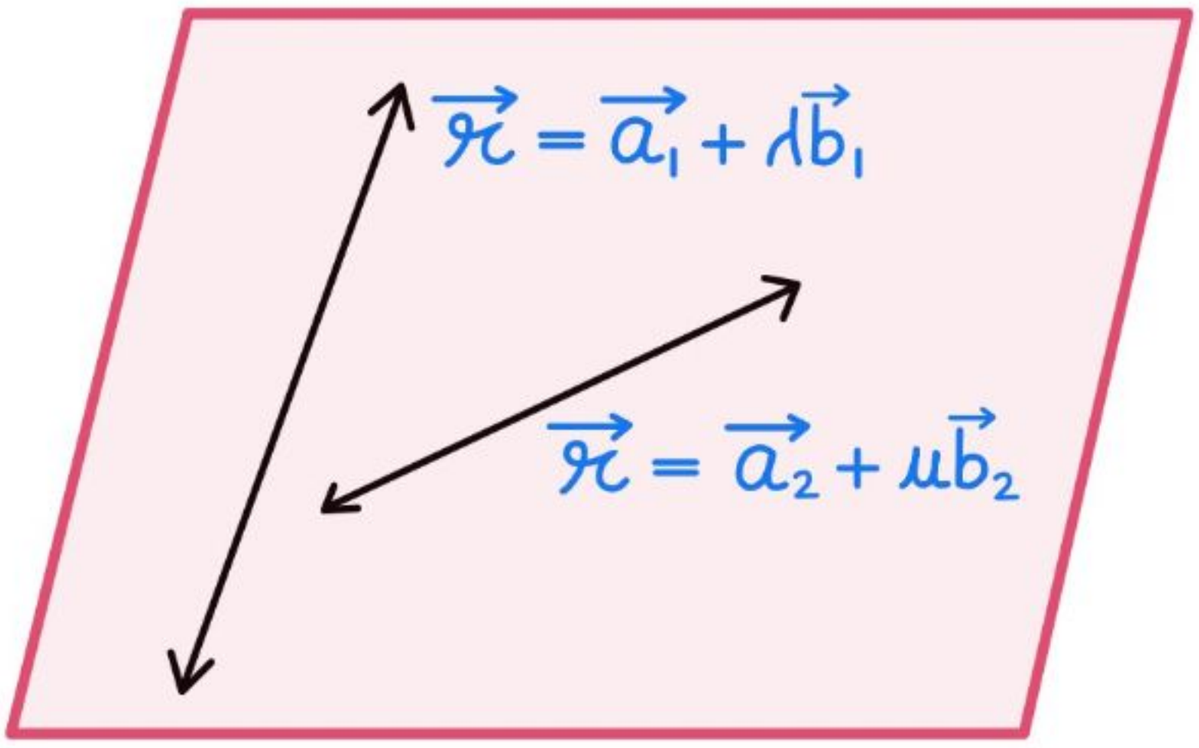
समांतर रेखाएँ

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b}$$

$$\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b}$$

$$\boxed{\text{दूरी} = \frac{|\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})|}{|\vec{b}|}}$$

दो रेखाओं के सहतलीय होने की शर्त



$$\vec{a_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{b_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$$

$$\vec{a_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

$$\vec{b_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

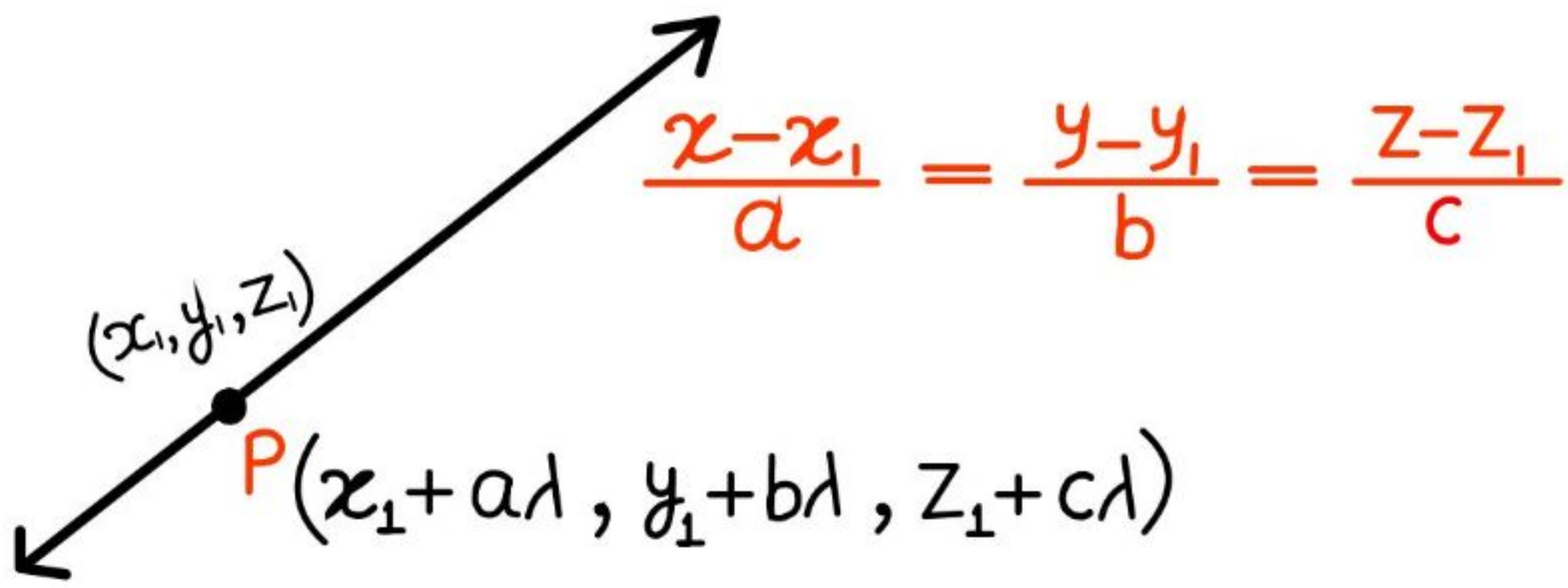
सदिश रूप में शर्त →

$$\boxed{(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0}$$

कार्तीय रूप में शर्त →

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

किसी रेखा पर कोई बिंदु Assume करना



$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = \lambda \text{ (माना)}$$

$\frac{x - x_1}{a} = \lambda$	$\frac{y - y_1}{b} = \lambda$	$\frac{z - z_1}{c} = \lambda$
$\Rightarrow x - x_1 = a\lambda$	$\Rightarrow y - y_1 = b\lambda$	$\Rightarrow z - z_1 = c\lambda$
$\Rightarrow x = x_1 + a\lambda$	$\Rightarrow y = y_1 + b\lambda$	$\Rightarrow z = z_1 + c\lambda$

प्रश्नावली –12 रैखिक प्रोग्रामन

- **व्यवरोध** → $a_1x + b_1y \le c_1$ तथा
  $a_2x + b_2y \ge c_2$ तथा
  $\boxed{x \ge 0,\ y \ge 0}$ → (ऋणेत्तर व्यवरोध)

- **उद्देश्य फलन (Z)** → चर x और y में एक रैखिक फलन

$$\boxed{Z = px + qy}$$

p, q → अचर
x, y → निर्णायक चर

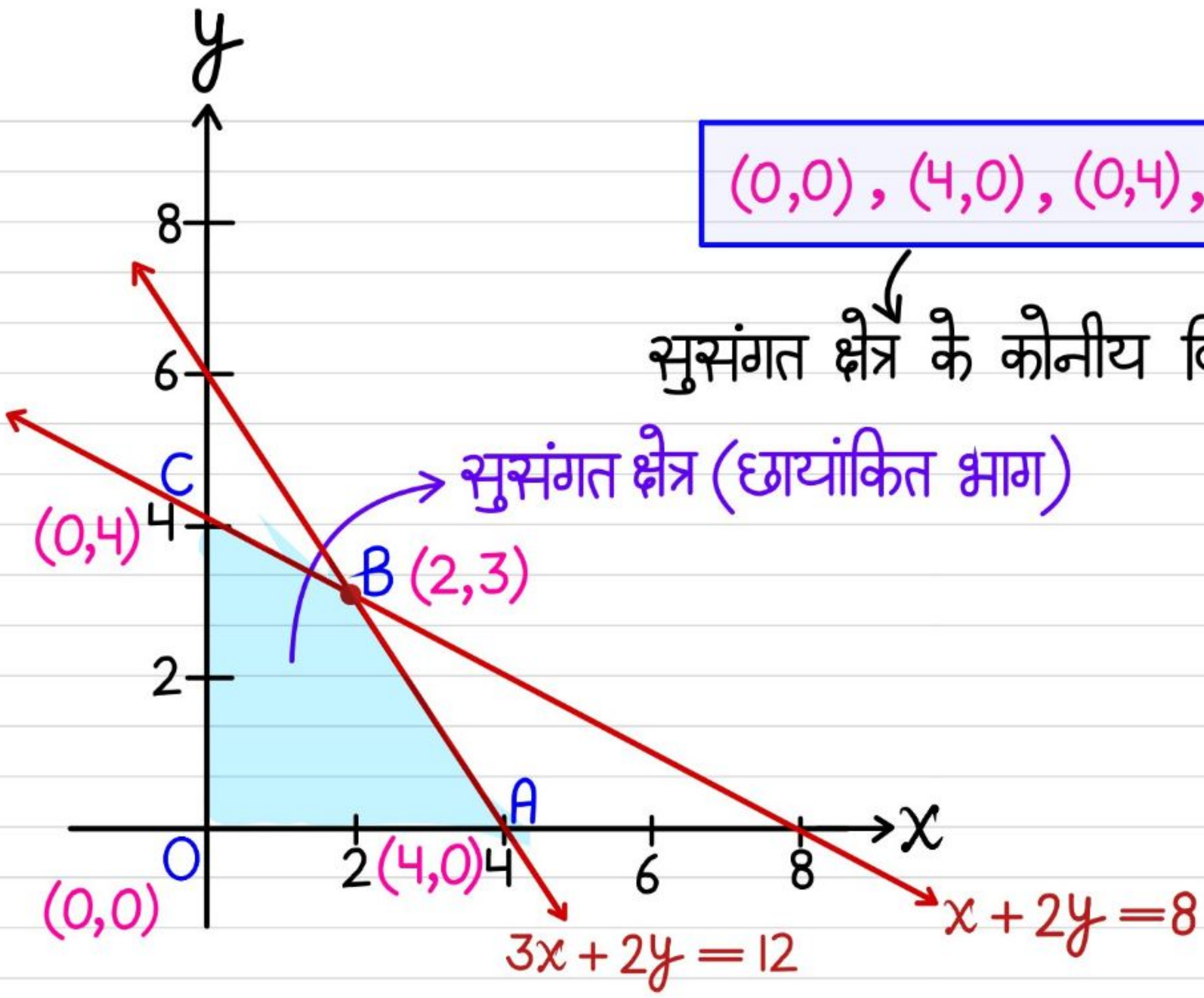
- **सुसंगत क्षेत्र**
  → सभी व्यवरोधों द्वारा नियत उभयनिष्ठ क्षेत्र

- **सुसंगत हल समूह**
  → सुसंगत क्षेत्र के अंतः भाग तथा सीमा के सभी बिन्दु

- **इष्टतम / अनुकूलतम हल**
  → सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु जो उद्देश्य फलन का इष्टतम मान (अधिकतम या न्यूनतम मान) दें।

उदा. Max, $\boxed{Z = 2x + 3y}$ → उद्देश्य फलन

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\le 8 \\ 3x + 2y &\le 12 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\} \text{व्यवरोध}$$



(0,0) , (4,0) , (0,4) , (2,3)

सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु

बिन्दु	$Z = 2x + 3y$
O (0,0)	$Z = 2(0) + 3(0) = 0$
A (4,0)	$Z = 2(4) + 3(0) = 8$
B (2,3)	$Z = 2(2) + 3(3) = 13$ → अधिकतम मान
C (0,4)	$Z = 2(0) + 3(4) = 12$

(2,3) → Z का अधिकतम मान प्राप्त हुआ

इष्टतम हल

NOTE →

(1) यदि सुसंगत क्षेत्र परिबद्ध हो तब उद्देश्य फलन, सुसंगत क्षेत्र में दोनों अधिकतम मान और न्यूनतम मान रखता है और यह मान सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु पर प्राप्त होंगे।

(2) यदि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध हो तब उद्देश्य फलन का अधिकतम मान या न्यूनतम मान का अस्तित्व नही भी हो सकता है तथापि यदि यह अस्तित्व में होता है तो सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु पर स्थित होना चाहिए।

सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional probability)

$P(A) \longrightarrow$ घटना A के घटित होने की प्रायिकता

$P(A|B)$ या $P\left(\frac{A}{B}\right) \longrightarrow$ घटना A के घटित होने की प्रायिकता जबकि घटना B घटित हो चुकी है।

$P(B) \longrightarrow$ घटना B के घटित होने की प्रायिकता

$P(B|A)$ या $P\left(\frac{B}{A}\right) \longrightarrow$ घटना B के घटित होने की प्रायिकता जबकि घटना A घटित हो चुकी है।

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

प्रायिकता का गुणन नियम

→ $P(A \cap B) =$ A तथा B दोनों के घटित होने की प्रायिकता

→ $A \cap B = AB$

→ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A \cap B) = P(B) . P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B|A)$$

अतः $P(AB) = P(A) . P(B|A) = P(B) . P(A|B)$

इस परिणाम को "प्रायिकता का गुणन नियम" कहते हैं।

→ यदि A, B, C तीन घटनाएँ हों तो प्रायिकता का गुणन नियम

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|A \cap B)$$

या $$P(ABC) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|AB)$$

स्वतंत्र घटनाएँ

A व B स्वतंत्र घटनाएँ होगीं यदि,

$$\boxed{P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A).\ P(B)}$$

$$\boxed{P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A).\ P(B)}$$

→ A, B व C तीनों स्वतंत्र घटनाएँ होंगी

यदि $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

→ यदि $P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B)$ तो A व B पराश्रित घटनाएँ कहलाती हैं।

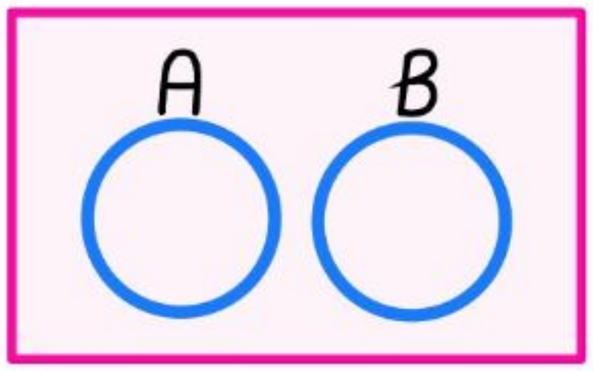
→ यदि E व F स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो

1. E व F' भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी
2. E' व F भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी
3. E' व F' भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी

परस्पर अपवर्जी घटनाएँ

$A \cap B = \phi$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$



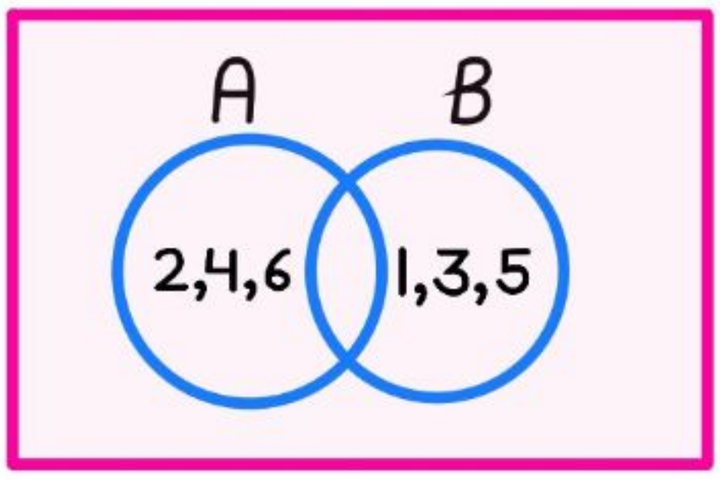
उदा. 1 पासा फेंका

A ⟶ सम संख्या

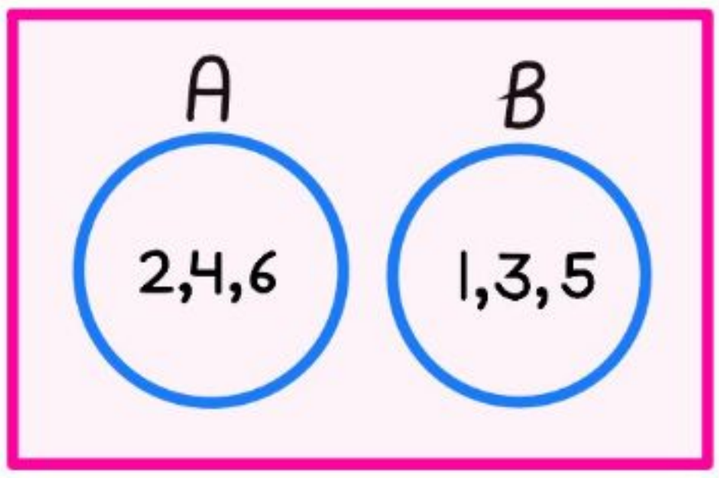
B ⟶ विषम संख्या

$A = \{2,4,6\}$
$B = \{1,3,5\}$

$A \cap B = \phi$
$P(A \cap B) = 0$



या



निः शेष घटनाएँ

$A \cup B = S$ अतः $P(A \cup B) = 1$

उदा. 2 सिक्के उछाले

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

घटना A = कम से कम एक पट प्रकट होना

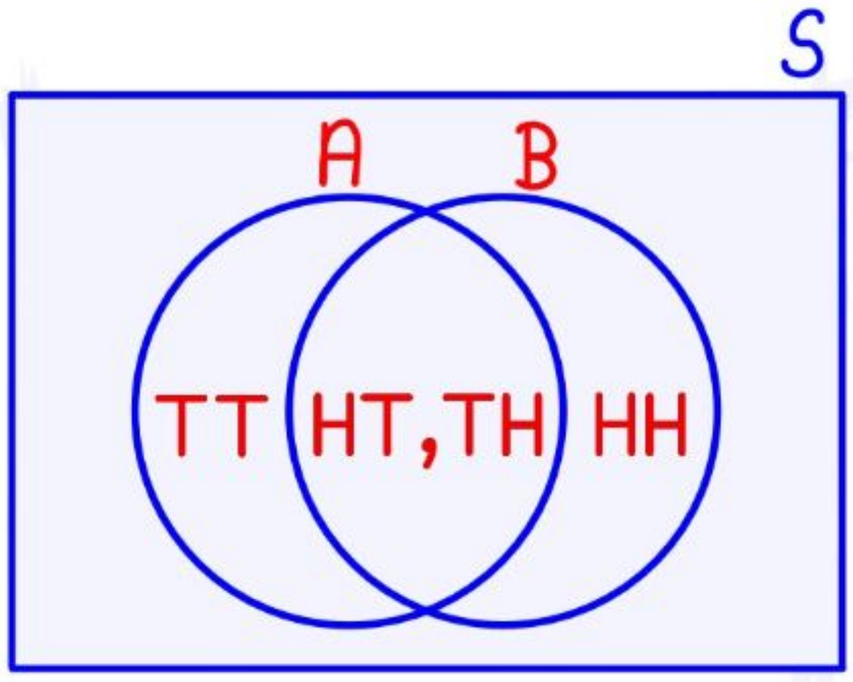
घटना B = कम से कम एक चित प्रकट होना

अतः $A = \{HT, TH, TT\}$

तथा $B = \{HH, HT, TH\}$

$A \cup B = \{HH, HT, TH, TT\} = S$

अतः A व B निः शेष घटनाएँ हैं।



बेज़ प्रमेय (Bayes' Theorem)

- दी गई घटना $\longrightarrow A$

  जिस घटना की प्रायिकता पूछी गई हो $\longrightarrow E_1, E_2, E_3$---

  यदि E_1 व E_2 दो घटनाएँ हों तो

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\ P(A|E_1)}{P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2)}$$

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)\ P(A|E_2)}{P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2)}$$

यहाँ $P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2)$

यही " सम्पूर्ण प्रायिकता की प्रमेय " कहलाती है।